数値計算法概論：No.7

1　数値積分 (特異性あるもの)

積分可能な関数でも被積分関数が端点に特異性を持つ (微係数が発散する) 場合、例えば

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \frac{\pi}{4} \tag{1}$$

は台形公式で数値積分したものに Richardson 加速をしても収束性が遅い。こういった問題には (Aitken 加速 [1, 2] など) 別のテクニックが必要となる。

2　数値積分 (周期関数)

逆にある場合には台形則の収束性が極めて早くなる。解析的な周期関数 $f(x)$ の 1 周期 $[a, b]$ に渡る積分を台形則で計算した時の誤差は、$f^{(m)}(a) = f^{(m)}(b)$ (すべての m に対して) であるから、Euler-Maclaurin の総和公式で、$O(h^m)$ の形の誤差はなくなり、収束が極めて早くなる (ただし $\exp(-c/h)$ のような振舞いをする誤差は残り得る) [3]。従って、収束加速法が特に必要なくなる (また、Richardson 補外の単純な応用では扱えない)。

課題：

1.

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+p\cos\theta} \qquad (0 < p < 1) \tag{2}$$

を計算せよ。解析的には留数定理の応用 [4] で計算できる。

2.

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(nx - z\sin x)dx \tag{3}$$

(Bessel 関数 [5]) を計算して、収束性を評価して見よ。注：gnuplot に $J_n(z)$ (besj0(x) など) がある。

3　一般的注意

3.1　レポート提出に付いて

数値積分について、No.5 の課題の中から 2 題以上と、自分で選んだ積分 1 題以上について台形則で計算せよ。収束性について議論し、収束加速法 (Richardson 補外) がうまく行く場合にはこれを使って精度向上を図ってみよ。

余裕があるものは、No.7 の周期関数についても取り組んでみよ。

まず、何の積分を行なったのか方程式を明確に記し、それに対するプログラム (重複するものは省略可) とプログラムの説明及び実行結果、収束性の考察、その他のコメントを付けてレポート No.2 として提出せよ。講義名、名前、学籍番号、提出日時を表紙に明記すること (メールの場合もこの情報含めること)。提出期限は 6 月 16 日まで。コピーレポートはオリジナルも含め認めない。

解析的な考察が出来る場合は書くこと。表・図 (gnuplot などのツールがある) を入れて分かり易く工夫したものは評価する。参考文献なども明記すること。また、コピーレポートは認めないが、互いの議論によりレポートの質が向上した場合は評価するので、議論した部分・参考とした意見と相手の氏名を明記して出すこと。Fortran 以外の言語 (C,C++) を使った場合は、記しておくこと。

提出先は、野村 (理学部 2 号館 2641 号室、内線 2566、e-mail:knomura@stat.phys.kyushu-u.ac.jp)、メールでの提出も認める (この場合は、自分のところにかならず Cc: しておくこと、提出洩れがあるかないか後で確認する時に必要。また Subject: には Report No.2 と入れること。余裕があれば文書整形システム platex [6] を使いレポートを作成してみよ。

参考文献

[1] 「数値計算の常識」、伊理 正夫、藤野 和建 著、共立出版 (第 20 章 2 節、第 7 章 4 節)

[2] 「数値計算法の数理」、杉原 正顯、室田 一雄 著、岩波書店 (第 12 章 4 節 2)

[3] 「数値計算の常識」、伊理 正夫、藤野 和建 著、共立出版 (第 7 章 5 節)

[4] 「物理応用 数学演習」、後藤 憲一、山本 邦夫、神吉健 共著、共立出版 (第 4 章 5 節)

[5] 「数学公式集」 第 3 巻, 第 VI 編、岩波全書

[6] 文書処理システム "LaTeX", Leslie Lamport 著、倉沢 良一 監訳、アスキー出版社