

一般相对性理論

平成 31 年 4 月 23 日

目次

第1章	概観	1
1.1	ガリレイ変換	1
1.1.1	Newton 力学	1
1.1.2	Galilei の相対性原理	1
1.1.3	慣性の法則の歴史的背景	3
1.2	特殊相対論	3
1.3	一般相対論	7
1.3.1	一般相対論の展開	9
第2章	多様体とテンソル場	13
2.1	多様体	13
2.1.1	開集合, 位相, 連続	13
2.1.2	多様体	15
2.1.3	可微分関数と可微分写像	17
2.2	多様体上のベクトル	18
2.2.1	ベクトルの公理	18
2.2.2	接ベクトル (tangent vector)	20
2.3	テンソルと計量テンソル	26
2.3.1	双対空間, 双対ベクトル	26
2.3.2	テンソル	27
2.3.3	多様体上のテンソル	29
2.3.4	計量	30
2.4	抽象添字記法	32
第3章	曲率	35
3.1	微分演算子と平行移動	36
3.2	曲率 (curvature)	43
3.3	測地線 (Geodesics)	48
3.4	曲率の計算方法	54

3.4.1	座標成分法	54
3.4.2	正規直交基底 (Tetrad) 法	56
第 4 章	アインシュタイン方程式	59
4.1	相対論以前の空間の幾何学	59
4.2	特殊相対論	61
4.3	一般相対論	68
4.4	重力の線形化：ニュートン極限と重力波	76
4.4.1	Newton 極限	78
4.4.2	重力放射	81
第 5 章	一様等方宇宙	87
5.1	一様性と等方性	87
5.2	一様で等方な宇宙の動力学	91
5.3	宇宙の赤方偏移；地平線	97
5.3.1	赤方偏移	97
5.3.2	粒子地平線	99
5.4	我々の宇宙の進化	102
第 6 章	シュワルツシルト解	109
6.1	シュワルツシルト解の導出	109

第1章 概観

1.1 ガリレイ変換

1.1.1 Newton 力学

Newton¹ 力学の3法則

1. 外力が作用していないとき、全ての物体は静止、または一定速度で直線運動する。
2. 物体に外力が作用しているとき、物体の加速度は外力に比例する。

$$\vec{f} = m\vec{a} \quad (1.1.1)$$

3. 作用と反作用の大きさと方向は等しく、向きは反対である。

Newton の法則のうち、最初のを慣性の法則とよぶ。実は座標系によっては慣性の法則は必ずしも成り立たつわけではない。慣性の法則が成り立たないように見える座標系の例は、回転座標系での運動(コリオリの力や遠心力)、重力中での自由落下する座標系である。慣性の法則が成り立つ座標系を特に慣性系 (inertial system) とよぶ。

1.1.2 Galilei の相対性原理

Galilei² の相対性原理

「どの慣性座標系を基準にとっても Newton の力学法則は同じ形式に書き表される」

まず、ある慣性座標系を平行移動しても回転しても、慣性座標系となる。座標系の平行移動は空間の一様性に、回転は等方性に関する。平行移動も回転も距離を不変に保つ、合同な座標変換である。

¹Isaac Newton (1643-1727): イギリスの科学者 (物理、数学、天文学)

²Galileo Galilei (1564-1642): イタリアの科学者 (物理学、天文学、数学)

次に運動する座標系として、2つの直交座標系 S と S' を考える。 S 系の各軸と S' 系の各軸とはそれぞれ平行で、 x' 軸は x 軸に重なっているものとする。時刻は $t = 0$ の瞬間に $t' = 0$ のように設定する。また $t = 0$ では2つの直交座標系は一致しているとする。 S 系から見たとき S' 系は x 軸の正の方向に一定の速度 v で運動しているものとする (図 1.1)。

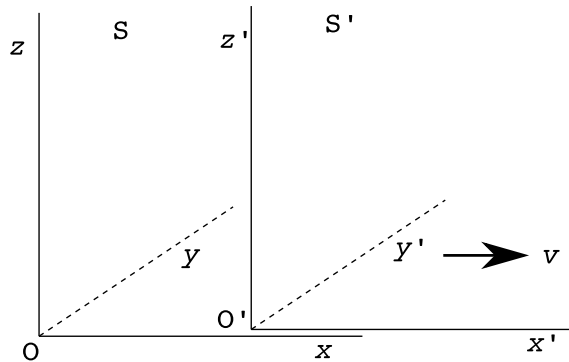


図 1.1: ガリレイ変換

S を基準にしたとき、時刻 t における質点の位置 (直交座標) を x, y, z 、同じ瞬間に S' から見た座標を x', y', z' とすると、

$$x' = x - vt, y' = y, z' = z, t' = t \quad (1.1.2)$$

したがって S 系および S' 系から見た、速度および加速度は

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v, \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}, \quad (1.1.3)$$

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{d^2z}{dt^2} \quad (1.1.4)$$

となる。 S を慣性系とすれば Newton の運動方程式

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{f} \quad (1.1.5)$$

が成り立つ。ここで \vec{f} は S 系から見た力を表す。 S' 系から見た力を \vec{f}' とし、力は速度に無関係で $\vec{f}' = \vec{f}$ とすれば、(1.1.4) と (1.1.5) から

$$m \frac{d^2 \vec{x}'}{dt'^2} = \vec{f}' \quad (1.1.6)$$

となり、 S' 系から見た質点の運動にも (1.1.5) と同じ形の法則が成立している。

Galilei の相対性原理の暗黙の前提は、どの慣性座標系でも時間の進みは一樣 (絶対時間) ということである。

1.1.3 慣性の法則の歴史的背景

なお、「慣性の法則」が生まれた背景には、地動説がある。地動説では地球表面の自転速度は(緯度にもよるが)数百 m/s の速さである(地球半径の測定は紀元前3世紀のエラトステネス(誤差約1-2割)、紀元後10世紀アブー・ライハーン・アル・ビールニー(誤差0.5%))。また、地球の公転速度は約30km/s(太陽-地球の距離の測定の歴史は紀元前3世紀のアリスタルコスから始まるが、当時の誤差は1桁以上。17世紀頃から金星の日面通過などをつかって50%程度の精度が出始めた)である。アリストテレス流の「絶対静止系」を想定する力学では地動説はすぐに否定される。地動説が意味を持つためには「慣性の法則」を想定しなければならない。したがってGalileiの「慣性の法則」は(地動説を正当化するための)ある種の思考実験から生まれたといえる。「航行中の船の上から物を落とすと、船の外からは、物体の運動は船の運動と落下運動の合成した運動として観測されるが、船に乗っている人からみれば、落下運動のみがみられる。」『天文対話』

また、Kepler³の寄与も重要である。Keplerが火星の軌道を解析して「面積速度一定」と「楕円軌道」となることを見つけた結果、地動説の計算精度が初めて天動説より飛躍的に高くなり(コペルニクスの天動説では計算精度が低く、天動説と同程度)、地動説が広く受け入れられるようになった。Keplerの法則はNewtonの万有引力の法則の観測的な基盤にもなっている。

1.2 特殊相対論

次の相対性原理と光速度不変の原理

1. 全ての物理法則はどの慣性系でも同等
2. 光速度不変の原理 「真空中の光の速さは光源や観測者の運動状態に無関係」

(絶対時間の概念をとりさげている)を元にして、二つの慣性系SとS'の間を結ぶ関係式を求めよう。

単純化のため、二つの慣性座標系SとS'として、図1.1に示されたものを考える。

³Johannes Kepler (1571 - 1630): ドイツの天文学者

1. まず相対性原理から S 系から見た場合に1個の質点が等速直線運動をしているとすれば、S' 系からも等速直線運動をしているように見えるはずである。そのためには x', y', z', t' が x, y, z, t の1次式であらわされているばよい。
2. xy 面と $x'y'$ 面、 xz 面と $x'z'$ 面は常に一致したままであるから、 $z = 0$ なら $z' = 0$ 、また $y = 0$ なら $y' = 0$ が x, t に無関係に成立する。したがって次の関係式が成り立つ。

$$y' = \kappa(v)y, \quad z' = \kappa(v)z \quad (1.2.1)$$

κ は x, y, z, t には無関係な比例定数だが、 v には依存してもかまわない。 y, z の比例係数が同じであるのは、空間の等方性にもとづく。同じく空間の等方性から v を $-v$ にしても κ は変わらない。したがって $\kappa(v)$ は $|v|$ の関数である。

逆に S' 系から S を見た場合、S は x' 軸の負の向きに速さ v で走っているので、

$$y = \kappa(-v)y', \quad z = \kappa(-v)z' \quad (1.2.2)$$

が成立する。したがって (1.2.1), (1.2.2) から

$$(\kappa(|v|))^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad \kappa(|v|) = \pm 1 \quad (1.2.3)$$

となる。ここで $v \rightarrow 0$ とすれば $y' \rightarrow y, z' \rightarrow z$ となるはずなので、結局 $\kappa(|v|) = 1$ となる。したがって

$$y' = y, \quad z' = z \quad (1.2.4)$$

がえられる。

3. 次に光速不変の原理を考えよう。いま $t = t' = 0$ の瞬間に S の座標原点 O で光源が点滅したとする。その閃光は時間 t がたつとともに O を中心に球面状に速さ c でひろがっていく。この現象を S から観測すると、点 P (座標 (x, y, z)) に光の波面が到達する時刻を t とすると、

$$s^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0 \quad (1.2.5)$$

がなりたつ。これを S' 系から眺める。点 P は S' 系では座標 (x', y', z') で表現される。光の波面が点 P に到達する時刻を S' 系で t' とすると、光速不変の原理から

$$s'^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = 0 \quad (1.2.6)$$

となる。

次に、 x', y', z', t' が x, y, z, t の 1 次式である (相対性原理) ことと、(1.2.5) がなりたてば (1.2.6) も成り立つべきである (光速不変の原理) という要請から、 $s^2 \neq 0$ について

$$s'^2 = \alpha(v)s^2 \quad (1.2.7)$$

が成り立っている。 $\alpha(v)$ は x, y, z, t には無関係で、 v には依存してもかまわない。空間の等方性から前述と同じ推論で

$$s^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = s'^2 \quad (1.2.8)$$

が導かれる。

4. (x, t) と (x', t') の関係を整理すると、

$$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2 \quad (1.2.9)$$

ここで

$$x' = ax + bt, \quad t' = fx + gt \quad (1.2.10)$$

とおく。 a, b, f, g は座標には無関係で v のみの関数である。

(1.2.10) を (1.2.9) に代入して、任意の x, t について成立するという要請から

$$\begin{aligned} a^2 - c^2 f^2 &= 1 \\ ab - c^2 fg &= 0 \\ g^2 - b^2/c^2 &= 1 \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

が導かれる。この解は、

$$a = \pm \cosh \theta, \quad b = \mp c \sinh \theta = -ca \tanh \theta, \quad (\text{複号同順}) \quad (1.2.12)$$

および

$$f = \pm \frac{1}{c} \sinh \theta, \quad g = \mp \cosh \theta = -\frac{cf}{\tanh \theta} \quad (\text{複号同順}) \quad (1.2.13)$$

である。ここで、 θ は

$$\tanh \theta = -\frac{b}{ca}$$

で与えられる .

さらにパラメーター θ を求めるため、次の考察をする . S' 系の座標原点 O' は S 系から見たとき、速さ v で x 軸の正の方向に走っている . O' は $x' = y' = z' = 0$ であらわされる。

$$ax + bt = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (1.2.14)$$

つまり、

$$x = -\frac{b}{a}t \quad (1.2.15)$$

したがって

$$-\frac{b}{a} = v \quad (1.2.16)$$

つまり、

$$\tanh \theta = \frac{v}{c} \quad (1.2.17)$$

である。以下、

$$\beta = \frac{v}{c}$$

とおく。すると、

$$\begin{aligned} \cosh \theta &= (1 - \tanh^2 \theta)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \sinh \theta &= \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

以上をまとめると、

$$x' = \pm \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1.2.19)$$

および

$$t' = \pm \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.2.20)$$

となる。

さらに $v \rightarrow 0$ で $x' \rightarrow x$, $t' \rightarrow t$ となるためには

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.2.21)$$

でなければならない．この関係式は、Lorentz⁴ および Poincaré⁵ によって、Einstein⁶ とは独立に導かれた．Einstein は2人の研究を知らずに、少しおくれて導いたのであるが、彼の元とした前提は先の2人よりずっと単純であったので、大きな意義がある．現在この変換は Lorentz 変換と呼ばれる．

なお、(1.2.21) を逆に解くと、

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.2.22)$$

となる．これは(1.2.21) で $v \rightarrow -v$, $(t, x, y, z) \rightarrow (t', x', y', z')$ と置き換えたものに他ならない．

以上述べた慣性系 S から慣性系 S' への(1.2.21) にしたがう変換は、Lorentz 変換の中でも特に簡単な場合で、特殊 Lorentz 変換と呼ばれる．

一般の Lorentz 変換は 特殊 Lorentz 変換と空間方向の回転を組み合わせたもので表される．

特殊相対性理論は、歴史的には電磁気学の Maxwell⁷ 方程式が Galilei 変換に対して不変でないことを解決する試みから生まれた．光速度が Galilei 変換にしたがうとすれば、地球の公転速度から検出可能なはずだが、Michelson⁸-Morley⁹ の実験によって否定された．したがって電磁気学の法則はそのまま特殊相対性理論の枠組みにしたがっている．力学の法則には修正が必要だが、速度が十分小さい時には Newton 力学に従うとして相対論的な拡張が可能である．また実験的にも確認ができる．

1.3 一般相対論

古典的な Galilei 変換にしても、特殊相対論的な Lorentz 変換にしても、慣性系同士の座標変換であった．加速度系まで含めた一般の座標変換を扱うにはさらなる拡張が必要である．

⁴Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928): オランダの物理学者、1902 年ノーベル物理学賞

⁵Jules Henri Poincaré (1854- 1912): フランスの数学者、理論物理学者

⁶Albert Einstein (1879-1955): ドイツの理論物理学者、1921 年ノーベル物理学賞

⁷James Clerk Maxwell (1831-1879): イギリスの科学者 (物理、数学)

⁸Albert Abraham Michelson (1852-1931): アメリカの物理学者、1907 年ノーベル物理学賞

⁹Edward Morley (1838-1923): アメリカの物理学者

また，重力は他の力とは異なる．慣性質量と重力質量が一致すること（等価原理，Eötvös の実験 (1885,1889,1906-1909)）から，重力場中でも適

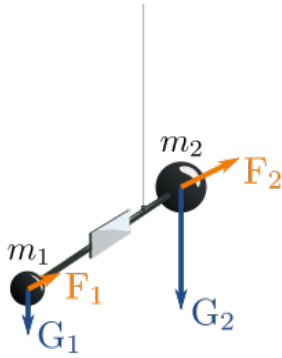


図 1.2: G_1, G_2 : 物体 1, 2 に働く重力, F_1, F_2 : 物体 1, 2 に働く (地球自転による) 遠心力

当な加速度系をとれば慣性系と見なすことができる (アインシュタインの「エレベーターの思考実験」, 人生で最高の思いつき (glücklichste Gedanke meines Lebens)) . このようなことは電磁場など他の力ではできない . ただし, 重力を適当な加速度座標系で打ち消せるといっても, それは特定の点のみである (局所慣性系) . 重力は空間で一様ではないため (潮汐力), 重力を大局的に加速度系を使って打ち消すことはできない . いいかえれば空間の各点で局所慣性系をとることはできるが, それをお互いに貼り合わせる必要があるし, その結果はいわゆる曲がった時空間となる . なお, 局所慣性系上では特殊相対論が成り立つものとする .

この様な考察から重力を扱うには, 曲がった時空を記述する数学が必要である . この様な数学は古典的にはリーマン幾何学, 現代流には多様体と呼ばれる .

古典的な幾何学で例をとると, 地球表面は局所的には平面で近似できる (ユークリッド幾何学, 地図) が, 大局的には平面とは異なる . 局所的な複数の「地図」の張り合わせ方を調べることで, 地球表面の曲率や大局的な構造を推論できるはずである . なお, 地球表面は 3 次元のユークリッド空間に埋め込まれているが, 一般相対論ではそのようなフラットな高次元時空間の埋め込みを考えていない .

1.3.1 一般相対論の展開

1. 観測と実証

(a) 水星の近日点の移動(1915), 100年間に 43.1 秒(理論 43.0 秒)

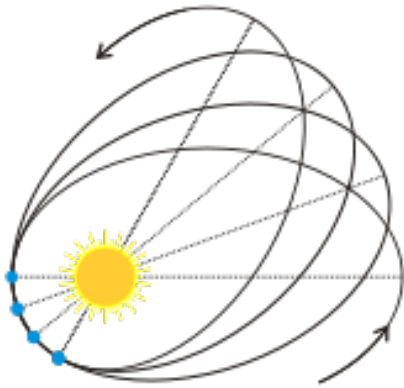


図 1.3: 近点移動による軌道の変化。近点と長軸が回転している。

(b) 太陽近傍での光の曲がり (1919)

(c) 重力による時間変化, 赤方偏移

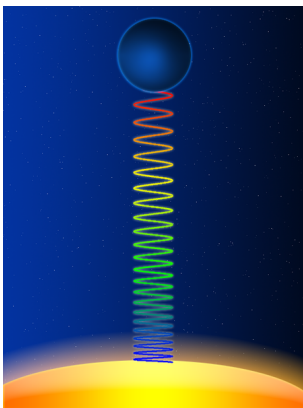


図 1.4: 重力による赤方偏移

i. 白色矮星のスペクトル (Sirius B (1925,1971), 40 Eridani B (1954))

- ii. メスバウアー効果利用, 22.5m の塔 (Pound and Rebka 1959)
- iii. ロケット (10,000km) に原子時計 (水素メーザー) 搭載 (1976)
- (d) 連星パルサー PSR B1913+16 (1974-1993) の一般相対論的效果

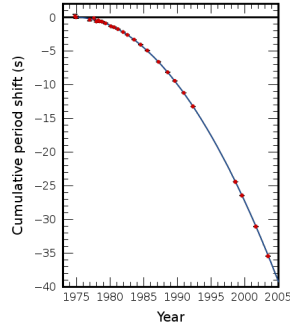


図 1.5: 連星パルサーの公転周期の変化, 重力波の放出と整合している

- (e) 重力磁気効果 (Lense-Thirring precession)
Gravity Probe B (2004-2010, 2015)
- (f) 重力波直接検出とブラックホールの合体 (LIGO, 2015)

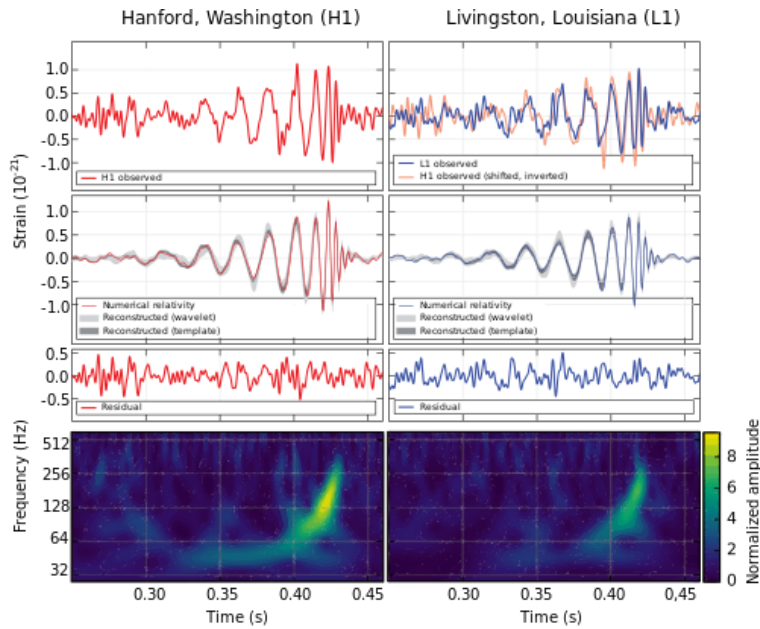


図 1.6: LIGO による重力波の観測

(g) M87 銀河の巨大ブラックホール撮影, イベントホライズンテレスコープ (2019)

2. ブラックホール

3. 宇宙論

4. 重力波

5. 超弦理論

6. GNSS(GPS)

第2章 多様体とテンソル場

多様体とは、直観的に説明すると、大局的には異なるが局所的にはユークリッド空間と見なせるような図形のことである。例えば、地球は球体であるが、我々の生活している空間はあたかもフラットな平面であるように思える。実際、後に示すように地球（2次元球面）は多様体である。一般相対論では、我々がよく知っている電磁気学などとは異なり、曲がった時空を扱う。ここでは、その数学的基礎として多様体の概念を学ぶ。

2.1 多様体

2.1.1 開集合, 位相, 連続

R^n の開集合

R^n の開集合の定義

数空間 R^n の部分集合 U をとる。 U に含まれる任意の点 a について、(正数) ϵ が十分小さければ

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| \equiv \left[\sum_{\mu=1}^n (x^\mu - y^\mu)^2 \right]^{1/2} < \epsilon$$

を満たす点 x がすべて U に含まれるとき、 U は開集合 (*open set*) である。

R^n の開集合の性質

1. R^n 自身は開集合である。また空集合 \emptyset も開集合である。
2. 有限個の開集合 U_1, U_2, \dots, U_k の共通部分 $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$ は R^n の開集合である。
3. 任意個 (有限個または無限個) の開集合 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ の和集合 $\cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ は R^n の開集合である。

この様に定義された開集合の族によって R^n には位相 (*topology*) を定めることができる。これを標準位相 という。

位相, 開集合

R^n では, 距離を手がかりにして開集合を定義したが, 距離の概念がなくとも開集合は定義できる。

集合 X の部分集合族 \mathcal{O} が次の3条件を満たすとき \mathcal{O} を X の位相 (*topology*) とよび, X と \mathcal{O} の対 (X, \mathcal{O}) を位相空間 (*topological space*) という。

1. $X \in \mathcal{O}$ かつ $\emptyset \in \mathcal{O}$
2. $U_1, U_2, \dots, U_k \in \mathcal{O}$ ならば $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k \in \mathcal{O}$
3. 任意の集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ について, $U_\lambda \in \mathcal{O}$ ならば, $\cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$

X の部分集合 U が \mathcal{O} に属する ($U \in \mathcal{O}$) とき, U を X の開集合という。

連続

2つの位相空間 (X, \mathcal{O}) と (Y, \mathcal{O}') をとる。写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続写像であるとは, Y の任意の開集合 U について, その逆像 $f^{-1}(U)$ が X の開集合になることである。

(注: この連続の定義は距離が定義できる場合には $\epsilon - \delta$ 論法に帰着することが示せる)

全単射

U, V を集合とする。写像 $f: U \rightarrow V$ が単射 (1対1) かつ上への写像であることを全単射 という。

同相写像, 同相

(X, \mathcal{O}) と (Y, \mathcal{O}') を位相空間とする. 写像 $f: X \rightarrow Y$ が次の条件を満たすとき, f は同相写像 (*homeomorphism*) であるという.

1. $f: X \rightarrow Y$ は全単射である.
2. $f: X \rightarrow Y$ も $f^{-1}: Y \rightarrow X$ も, とともに連続写像である.

Hausdorff 空間

位相空間 X の異なる任意の2点 x, y にたいして, x の開近傍 U と y の開近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在するとき, X を Hausdorff 空間という.

\mathbb{R}^n の距離空間は Hausdorff 空間である.

2.1.2 多様体

多様体の定義: Hausdorff 位相空間 M を考える. M の開集合族 $\{U_\alpha\}$ と, 各 U_α から n 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^n への写像 ψ_α が与えられていて次の条件が満たされるものとする.

1. 任意の点 $p \in M$ は少なくとも1つの U_α に含まれる. 言い換えると $M = \cup_\alpha U_\alpha$ である.
2. 各写像 $\psi_\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ の像 $\psi_\alpha(U_\alpha)$ は \mathbb{R}^n の開集合であり, ψ_α は U_α から $\psi_\alpha(U_\alpha)$ への同相写像 (*homeomorphism*) である.
3. $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ (\emptyset : 空集合) ならば,

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}: \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

は $\psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) (\subset \mathbb{R}^n)$ から $\psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) (\subset \mathbb{R}^n)$ への C^∞ 級 (無限回微分可能) 写像である.

このとき族 $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ は M に n 次元 C^∞ 多様体の構造を定めると言う. U_α と ψ_α を対にして局所座標 (*chart, local coordinates*) と言い, これらの全体 $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ を局所座標系 (*atlas*) とよぶ.

コメント:

1. 多様体の定義で $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ とは別の局所座標系 $\{V_\lambda, \phi_\lambda\}$ を考えることができる。しかしこれらは以下の条件を満たせば同じ多様体の構造を定めることになる。

$U_\alpha \cap V_\lambda \neq \emptyset$ ならば,

$$\phi_\lambda \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap V_\lambda) \rightarrow \phi_\lambda(U_\alpha \cap V_\lambda)$$

は $\psi_\alpha(U_\alpha \cap V_\lambda)$ から $\phi_\lambda(U_\alpha \cap V_\lambda)$ への C^∞ 級写像である。

以上の条件が満たされるとき2つの局所座標系 $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ と $\{V_\lambda, \phi_\lambda\}$ は同値であるという。

そして多様体 M の構造は同値な局所座標系のどれをとっても変わらないような性質として定義したのであった。

2. 位相空間の一般的な定義につけくわえ, 多様体 M は paracompact なものとする。これらにより単位の分割の定理が成立し, 多様体上の関数が扱いやすくなる。

[例1]

n 次元ユークリッド空間 R^n は多様体である。

[例2] 2次元球面 S^2

$$S^2 = \{(x^1, x^2, x^3) \in R^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$$

は多様体である。

S^2 を覆う半球上の開集合の族 O_i^\pm ($i = 1, 2, 3$)

$$O_i^\pm = \{(x^1, x^2, x^3) \in S^2 \mid \pm x^i > 0\}$$

をとる。それぞれの O_i^\pm ($i = 1, 2, 3$) は, 写像

$$f_1^+(x^1, x^2, x^3) = (x^2, x^3)$$

などの写像で開円板 $D = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ に位相同型で写像される。

$f_i^\pm \circ (f_j^\pm)^{-1}$ は定義域で C^∞ となることが確かめられる。

以上より, S^2 は2次元微分多様体である。

n 次元多様体 M と n' 次元多様体 M' をとる。 M 上の点 $p \in M$ と M' 上の $p' \in M'$ を組み合わせた (p, p') の直積集合 $M \times M'$ に M, M' の直

積空間としての位相を定義しよう． M 上の局所座標 $\psi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \psi_\alpha(U_\alpha)$ と M' 上の局所座標 $\psi'_\beta : U_\beta \rightarrow \psi'_\beta(U'_\beta)$ から $M \times M'$ 上の局所座標 $\phi_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \psi_{\alpha\beta}(U_{\alpha\beta}) \subset \mathbf{R}^{n+n'}$ を次のように定義する． $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \times U_\beta$, $\psi_{\alpha\beta}(p, p') = [\psi_\alpha(p), \psi'_\beta(p')]$. このようにすると, $M \times M'$ 上に $n + n'$ 次元多様体の構造を定めることができる． $M \times M'$ を M と M' の積多様体 (product manifold) とよぶ．

[例 3] n 次元トーラス

S^1 の n 個の積 $S^1 \times \cdots \times S^1$ は n 次元多様体である．これを n 次元トーラス (n -torus) という．

2.1.3 可微分関数と可微分写像

可微分関数

定義

m 次元多様体 M 上の実数値連続関数 f は次の条件を満たすとき微分可能であるという．任意の $p \in M$ に対しその座標近傍 (U, ψ) をとったとき, $f \circ \psi^{-1}$ が \mathbf{R}^m の開集合 $\psi(U)$ の関数として微分可能である．特に無限回微分可能な時は, 多様体 M 上の関数 f は C^∞ 関数である．

この定義は局所座標系のとり方に無関係である．

M 上の C^∞ 級関数全体の集合を $\mathcal{F}(M)$ と表す．多様体 M 上の可微分関数 $f, g \in \mathcal{F}(M)$ と定数 $a \in \mathbf{R}$ について, 和 $f + g$ とスカラー倍 af は可微分関数 $f + g \in \mathcal{F}(M), af \in \mathcal{F}(M)$ である．また可微分関数の積 fg も可微分関数 $fg \in \mathcal{F}(M)$ である．

可微分写像, 微分同相

次に, 多様体上の C^∞ 関数の概念の拡張として, 複数の多様体の間の写像を考察する．

定義

m 次元多様体 M から n 次元多様体 N への連続写像 $f : M \rightarrow N$ を考える． M の一点 p の近傍の局所座標を (U, ψ) とし, $f(p) \in N$ の近傍の局所座標を (V, ϕ) とする．このとき $\phi \circ f \circ \psi^{-1}$ が C^∞ のとき, f は点 p の近傍で C^∞ 級という． f が M のどの点でも C^∞ 級のとき, f を

M から N の C^∞ 級写像と言う．この定義は局所座標系のとりかたによらない．

さらに写像 $f: M \rightarrow N$ が C^∞ 級で，単射 (1対1写像) で，上への写像で，逆写像も C^∞ 級するとき， f は微分同相写像 (*diffeomorphism*) と呼ばれ， M と N は微分同相 (*diffeomorphic*) と呼ばれる．

2つの多様体が微分同相であればつねに同相である．では逆に同相であるときに微分同相と言えるか? $n \neq 4$ の n 次元ユークリッド空間に同相な位相多様体は，可微分構造まで含めて同相 (微分同相) である．ところが驚くべきことに $n = 4$ では n 次元ユークリッド空間に同相な位相多様体であっても，微分構造が異なるものが (無限個) 存在する (異種微分構造 (Exotic Differentiable Structures) S. K. Donaldson 1982, Seiberg-Witten 1994)．ちなみに n 次元球面では， $n \leq 6$ ならば n 次元球面に同相な位相多様体は微分同相としては1種類しかないが，7次元球面に同相な位相多様体は微分同相と言う点で分類して28の同値類がある (Exotic sphere, J. W. Milnor 1956)

2.2 多様体上のベクトル

多様体上では，ユークリッド空間でのように空間の変位としてベクトルを定義することができない．しかし，多様体は局所的にはユークリッド空間と見なすことが出来る．したがって，多様体上のある点近傍で，無限小変位として接ベクトルを定義し，その接ベクトルのなす接ベクトル空間の性質について学ぶ．

2.2.1 ベクトルの公理

まず，3次元ユークリッド空間のベクトルの性質を一般に拡張して，以下のように抽象的にベクトル空間を定義しよう．

ベクトルの公理

R (実数) または C (複素数) を記号 K で表す．

集合 V が以下の条件を満たすとき， V を K 上のベクトル空間という．

1. V の任意の 2 つの元 a, b にたいし, a, b の和とよばれる V の元 $a + b$ が定まり, 以下の規則が成り立つ (加群, アーベル群).

(a)

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

(b)

$$a + b = b + a$$

(c) 任意の $a \in V$ にたいして

$$a + \mathbf{0} = a$$

をみたく V の元 $\mathbf{0}$ が存在する. これを零ベクトル $\mathbf{0}$ という.

(d) 任意の $a \in V$ に対して

$$a + (-a) = \mathbf{0}$$

を満たす V の元 $-a$ が存在する. これを a の逆ベクトルという.

2. V の元 a と K の元 λ にたいし, a の λ 倍とよばれる V の元 λa が定義される. これらについて以下の規則が成り立つものとする.

(a)

$$(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$$

(b)

$$1a = a$$

(c)

$$\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$$

(d)

$$(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$$

K 上のベクトル空間 V の元のことをベクトル, K の元のことをスカラーとよぶ.

1次独立, 次元, 基底

V の r 個の元 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ と, r 個のスカラー $\lambda^1, \dots, \lambda^r$ にたいし

$$\lambda^1 \mathbf{a}_1 + \dots + \lambda^r \mathbf{a}_r = \mathbf{0}$$

ならば $\lambda^1 = \dots = \lambda^r = 0$ がなりたつとき, $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ は 1次独立 であるという.

ベクトル空間 V に n 個の 1次独立なベクトルが存在し, $(n+1)$ 以上の 1次独立なベクトルが存在しないとき, n を V の次元 と呼び,

$$\dim V = n$$

と表す.

n 次元ベクトル空間 V の n 個の 1次独立なベクトル $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ を V の基底 (*basis*) と呼ぶ. V の任意のベクトル \mathbf{x} は基底の 1次結合で

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{a}_i$$

のように, ただ一通りに表される.

コメント: 基底の選び方には任意性があるが, ベクトル空間の次元は基底の選び方に依存しない.

2.2.2 接ベクトル (tangent vector)

ユークリッド空間では, 位置ベクトルのように全空間に当てはまるベクトルが定義できた. 特殊相対性理論でも全時空間に当てはまるベクトルが定義できた. しかし曲がった空間ではそのようなことができない. それでも, 多様体上のある点のまわりの「無限小変位」あるいは接ベクトルを考えることで, ベクトル空間を構成できる.

例えば球面 S^2 は 3次元ユークリッド空間 R^3 に埋め込まれるので, ある点 p での接ベクトルの直観的な概念は接平面内部のベクトルである. R^n 次元空間に埋め込まれる多様体でもこのアイディアは数学的にきちんと定義できる. しかし, 高次元のユークリッド空間に埋め込まれない多様体の場合は接ベクトルをどのように定義したら良いか?

接ベクトルを方向微分と関連付けることで, (高次元空間への埋め込みを考えずに) 多様体上の接ベクトル空間を定義できる. あるベクトル

$v = (v^1, \dots, v^n)$ をとると, 対応する方向微分 (directional derivative) $\sum_{\mu} v^{\mu}(\partial/\partial x^{\mu})$ が定義できるし, その逆も成り立つ. 方向微分は関数に作用させたときに, 線形性と (微分に関する) ライプニッツ (Leibnitz) 則

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = \frac{df(x)}{dx}g(x) + f(x)\frac{dg(x)}{dx}$$

をみtasること特徴づけられる. これらの性質を抽象化して接ベクトル空間を定義しよう.

多様体 M 上で, M から \mathbf{R} への C^{∞} 級関数の集合を $\mathcal{F}(M)$ とあらわす. 多様体上の点 $p \in M$ での接ベクトル v を, $v: \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbf{R}$ への写像で, 以下の性質を満たすものとして定義しよう.

1. 線形性

$$v(f+g) = v(f) + v(g), \quad v(af) = av(f)$$

2. ライプニッツ則

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$$

(ここで $f, g \in \mathcal{F}(M), a \in \mathbf{R}$).

このようにして定義される接ベクトルの集合を, 点 p での接ベクトル空間 $V_p(M)$ と言う. 接ベクトル空間 $V_p(M)$ の要素はベクトルの公理を満たす. すなわち, 任意の要素 $v \in V_p(M)$ に対して,

1. 和

$$(v_1 + v_2)(f) = v_1(f) + v_2(f)$$

2. スカラー倍

$$(av)(f) = a(v(f))$$

のように定義すると, 和とスカラー倍に関して実ベクトル空間を作る.

補題. 多様体上で定数 c となる関数は, 任意の $v \in V_p(M)$ に対して $v(c) = 0$ である.

証明. 任意の $f \in \mathcal{F}(M)$ に対し, cf をとる. まず線形性より

$$v(cf) = cv(f)$$

またライプニッツ則より

$$v(cf) = cv(f) + f(p)v(c)$$

したがって $f(p)v(c) = 0$ である. f は任意の関数なので $v(c) = 0$ でなくてはならない. \square

定理 2.2.1. M を n 次元多様体とする. M 上の点を $p(p \in M)$ とし, p での接ベクトル空間を $V_p(M)$ とする. すると $V_p(M)$ の次元は $\dim V_p(M) = n$ である.

証明. $\dim V_p(M) = n$ を示すために, $V_p(M)$ の基底 (n 個の 1 次独立な接ベクトルでベクトル空間 $V_p(M)$ を張るもの) を構築しよう. 点 p を含む開集合 O での局所座標を $\psi : O \rightarrow U(\equiv \psi(O)) \subset \mathbf{R}^n$ とする. $f \in \mathcal{F}(M)$ ならば, 定義から $f \circ \psi^{-1} : U \rightarrow \mathbf{R}$ は C^∞ 級の関数である. $\mu = 1, \dots, n$ に対して写像 $X_\mu : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbf{R}$ を次のように定義する.

$$X_\mu(f) = \left. \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f \circ \psi^{-1}) \right|_{\psi(p)} \quad (2.2.1)$$

ここで (x^1, \dots, x^n) は \mathbf{R}^n でのデカルト座標である. すると X_1, \dots, X_n は接ベクトルであり. それらが 1 次独立であることは容易に示すことができる.

次に X_1, \dots, X_n が, ベクトル空間 $V_p(M)$ を張ることを示そう. そのために \mathbf{R}^n での微積分学の以下の結果 (問題 2 参照) を利用しよう. 関数 $F : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ が C^∞ 級ならば, 点 $a = (a^1, \dots, a^n) \in \mathbf{R}^n$ について,

$$F(x) = F(a) + \sum_{\mu=1}^n (x^\mu - a^\mu) H_\mu(x), \quad (\forall x^\mu \in \mathbf{R}^n) \quad (2.2.2)$$

を満たす C^∞ 級の関数 H_μ が存在する. また

$$H_\mu(a) = \left. \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \right|_{x=a} \quad (2.2.3)$$

である. 以上の結果を多様体上の関数に当てはめるため, $F = f \circ \psi^{-1}$ と置いて $a = \psi(p)$ とすると,

$$f(q) = f(p) + \sum_{\mu=1}^n [x^\mu \circ \psi(q) - x^\mu \circ \psi(p)] H_\mu(\psi(q)), \quad (\forall q \in O) \quad (2.2.4)$$

となる (注, p は固定点, q は O 内の任意の点). ある接ベクトル $v \in V_p(M)$ を取ると, v は X_1, \dots, X_n の線型結合で表されることを示そう. 任意の

関数 f に v を適応して, 式 (2.2.4) と, v の線形性とライプニッツ性および v を定数に施すと 0 となることを使うと

$$\begin{aligned} v(f) &= v[f(p)] + \sum_{\mu=1}^n [x^\mu \circ \psi(q) - x^\mu \circ \psi(p)] \Big|_{q=p} v(H_\mu \circ \psi) \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^n (H_\mu \circ \psi(q)) \Big|_{q=p} v[x^\mu \circ \psi - x^\mu \circ \psi(p)] \\ &= \sum_{\mu=1}^n (H_\mu \circ \psi(p)) v(x^\mu \circ \psi) \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

しかし式 (2.2.3) から, $H_\mu \circ \psi(p)$ は $X_\mu(f)$ そのものに他ならない. したがって, 任意の $f \in \mathcal{F}(M)$ にたいして

$$v(f) = \sum_{\mu=1}^n v^\mu X_\mu(f) \quad (2.2.6)$$

が得られる. ここで係数 v^μ は関数 $x^\mu \circ \psi$ に v を施したものの

$$v^\mu = v(x^\mu \circ \psi) \quad (2.2.7)$$

である. 結局, 任意の接ベクトル v を X_μ の和として表した

$$v = \sum_{\mu=1}^n v^\mu X_\mu \quad (2.2.8)$$

ことになる. これで定理が証明された. \square

定理 2.2.1 の証明の過程で導入した $V_p(M)$ の基底 $\{X_\mu\}$ は座標基底 (*coordinate basis*) とよばれる. しばしば X_μ を単に $\partial/\partial x^\mu$ と表す. もし我々が別の局所座標 ψ' を選んでいれば, 別の座標基底 $\{X'_\mu\}$ を得たであろう. もちろん新しい基底 $\{X'_\mu\}$ を使って X_μ を表すことができる. 連鎖律 (chain rule; 多変数の合成関数の偏微分の公式) を用いると

$$X_\mu = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \Big|_{\psi(p)} X'_\nu \quad (2.2.9)$$

をえる. ここで x'^ν は写像 $\psi' \circ \psi^{-1}$ の ν 番目の成分である. したがって (2.2.8), (2.2.9) 式から, ベクトル v の新しい座標基底での v'^ν 成分は, 古い座標基底での v^μ 成分と次のように関係づけられる.

$$v'^\nu = \sum_{\mu=1}^n v^\mu \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu} \quad (2.2.10)$$

式 (2.2.10) はベクトルの変換則として知られている。

多様体 M 上の滑らかな曲線 C とは (実線) R (または R の区間) から M への C^∞ 級写像 $C: R \rightarrow M$ である。曲線 C 上の点 $p \in M$ に対して、 C と接ベクトル $T \in V_p(M)$ を次のように関連付けることができる。 $f \in \mathcal{F}(M)$ に対して、 $T(f)$ を関数 $f \circ C: R \rightarrow R$ の点 p での微分と等しい ($T(f) = d(f \circ C)/dt$) とする。ここで局所座標 ψ に対する座標基底ベクトル X_μ は、 M 上で x^μ 以外の座標値をすべて定数として得られる曲線に接していることに注意しよう。座標系 ψ を選ぶと、 M 上の曲線 C は R^n の中の曲線 $x^\mu(t)$ に写像されることに注意しよう。すると任意の $f \in \mathcal{F}(M)$ に対して

$$T(f) = \frac{d}{dt}(f \circ C) = \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu}(f \circ \psi^{-1}) \frac{dx^\mu}{dt} = \sum_{\mu} \frac{dx^\mu}{dt} X_\mu(f) \quad (2.2.11)$$

結局、任意の座標基底で、曲線への接ベクトルの T^μ 成分は

$$T^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \quad (2.2.12)$$

で与えられる。

上記の議論では点 $p \in M$ を決めて、 p での接ベクトル空間 $V_p(M)$ を考えた。もちろん、他の点 $q \in M$ でも $V_q(M)$ を定義できる。強調すべき大事なことだが、多様体の構造を与えただけでは、 $V_q(M)$ を $V_p(M)$ と同一視する自然な方法がない、言い換えると q での接ベクトルが p での接ベクトルと「同一」であるかどうか決める方法がない。3章では、追加の構造 (つまり多様体上の接続もしくは微分演算子) が与えられたとき、 p と q を結ぶ曲線に沿ってのベクトルの「平行移動」の概念を得ることができるのがわかるだろう。しかし、曲率が 0 でなければ、このような $V_p(M)$ と $V_q(M)$ の同一視は曲線の選び方に依存するだろう。

多様体 M 上の接ベクトル場 v とは、各点 $p \in M$ にたいして接ベクトル $v|_p \in V_p(M)$ を割り当てるものである。異なる点での接ベクトル空間 $V_p(M)$ と $V_q(M)$ は異なるベクトル空間であるが、 v が各点で滑らかに変化することの意味には自然な概念がある。 $f \in \mathcal{F}(M)$ が (C^∞ 級) の滑らかな関数ならば、各点 $p \in M$ で $v|_p(f)$ は実数なので、 $v(f)$ は M 上の関数である。任意の滑らかな関数 f に対して $v(f)$ が滑らかな時、接ベクトル場 v は滑らかという。座標基底の場合 X_μ は滑らかであることが容易に示せるので、ベクトル場 v は、座標基底成分 v^μ が滑らかな時に限り滑らかであるし、逆も言える。

経験的な議論では、接ベクトルを「無限小変位」と表した。いまこの考えの正確な意味付けを示そう。微分同相写像の1パラメーター群 (*one-parameter group of diffeomorphism*) ϕ_t とは、 C^∞ 写像 $\mathbf{R} \times M \rightarrow M$ で以下の条件を満たすものである： $t \in \mathbf{R}$ を固定すると $\phi_t : M \rightarrow M$ は微分同相写像であり、さらに任意の $t, s \in \mathbf{R}$ にたいして $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ がなりたつ（これから直ちに $\phi_{t=0}$ は恒等写像であることが言える）。 ϕ_t には次のように接ベクトル場 v を対応させることができる。固定点 $p \in M$ にたいして $\phi_t(p) : \mathbf{R} \rightarrow M$ は、 $t = 0$ で点 p を通る曲線で ϕ_t の軌道 (*orbit*) とよばれる。この曲線に対して $t = 0$ での接ベクトルを $v|_p$ と定義しよう。このようにして、 M の1パラメーター変換群にたいして接ベクトル場 v が定義でき、 v はこれらの変換の無限小生成子と考えられる。

逆に、多様体 M 上の滑らかなベクトル場 v が与えられたとき、 v の積分曲線 (*integral curves*) (M の曲線の族で、点 $p \in M$ を通る曲線は1つだけ存在し、この曲線に p で接するのは $v|_p$ である性質のもの) を見つけることができるだろうか？ 答えは肯定的である：点 p の近傍で (定理 2.2.1 のように) 局所座標系をとると、積分曲線を見つけるという課題は次のような方程式を解くことに帰着する。

$$\frac{dx^\mu}{dt} = v^\mu(x^1, \dots, x^n) \quad (2.2.13)$$

これは \mathbf{R}^n での常微分方程式系で、 v^μ は座標基底 $\{\partial/\partial x^\mu\}$ での v の μ 番目の成分である。この常微分方程式の系は $t = 0$ での初期値を与えれば一意な解をもつので、滑らかなベクトル場 v はユニークな積分曲線の族をもつ。 v の積分曲線は (パラメーターの有限な領域にしか無い可能性を別にして)、 ϕ_t は微分同相写像の1パラメーター群である。

最後に2つの滑らかなベクトル場 v と w から、新しいベクトル場 $[v, w]$ が以下のように定義できる

$$[v, w](f) = v(w(f)) - w(v(f)) \quad (2.2.14)$$

これを v と w の交換子 (*commutator*) とよぶ。座標基底での2つのベクトル場 X_μ と X_ν の交換子は0となる。逆に0でないベクトル場 X_1, \dots, X_n で、互いに交換して線形独立ならば、それらが座標基底のベクトル場となるような局所座標を見つけることができる。

2.3 テンソルと計量テンソル

変位ベクトルの概念から，テンソルの概念を導くことができる．多くの物理量は変位に線形（あるいは多重線形）に依存する．例えば，磁場の計測を考えよう．プローブをある方向に向けるとある量が記録される：その方向の磁場の強度である．プローブが向く方向の可能性は無数にあるので，原理的には磁場を決めるには無限個の計測値が必要となるかもしれない．しかし，磁場の強度はプローブの向きに線形に依存するのでこの様な（無限の計測は）必要ではない．必要なのは3つの線形独立なプローブの方向の計測値である．それ以外のプローブ方向の計測値は，それら3つの計測値の線形結合に等しい．

この事実から磁場をベクトル，もっと正確に言えば双対ベクトルと考えることができる．双対ベクトルは，空間の変位ベクトルの基底（3つの独立なプローブの方向）に伴う3つの量の集合（プローブの計測値）と定義できるだろう．先では，空間変位ベクトルからの線形写像として，双対ベクトルのもっと簡単かつ直接的な定義を与える．

同様に，他の物理量で空間変位ベクトルに線形に依存するが，1つ以上のベクトルに依存するものがある．例として応力テンソルをとる．物体中の点 p を通る平面（その法線ベクトルは \vec{n} ）をとると，点 p で \vec{l} 方向に働く単位面積辺りの力 F を計測できる．力 F はベクトル \vec{n} と \vec{l} に線形に依存する．ベクトル対 (\vec{n}, \vec{l}) を F の大きさに写像するテンソルは応力テンソル (*stress tensor*) として知られる．

この節では，まず有限次元ベクトル空間に対して双対空間を定義して，それを利用して多重線型写像としてテンソルを定義する．

これらをつかって，多様体上のテンソル場を定義する．

2.3.1 双対空間，双対ベクトル

V を実数上の有限次元ベクトル空間とする（我々が特に関心があるのは接ベクトル空間 $V = V_p(M)$ の場合である）． V から \mathbf{R} の線形写像，つまり写像 $f: V \rightarrow \mathbf{R}$ で，任意の $a, b \in V$ と $\lambda \in \mathbf{R}$ にたいして

$$\begin{aligned} f(a + b) &= f(a) + f(b) \\ f(\lambda a) &= \lambda f(a) \end{aligned}$$

を満たすものを考える． V 上の線形写像全体の集合を V^* とあらわす．線形写像 $f, g \in V^*$ に対して和とスカラー倍を

$$\begin{aligned}(f + g)(\mathbf{a}) &= f(\mathbf{a}) + g(\mathbf{a}) \\ (\mu f)(\mathbf{a}) &= \mu f(\mathbf{a})\end{aligned}$$

と定義すると，これらはベクトルの公理を満たすので V^* 上の自然なベクトル空間の構造を得ることができる． V^* を V に対する双対ベクトル空間 (*dual vector space*)， V^* の要素を双対ベクトル (*dual vectors*) と呼ぶことにする．今後， V^* の要素を ω^* のように記そう． e_1, \dots, e_n を V の基底とすると， $e^{*1}, \dots, e^{*n} \in V^*$ を次のように定義できる

$$e^{*\mu}(e_\nu) = \delta^\mu_\nu \quad (2.3.1)$$

ここで $\mu = \nu$ のとき $\delta^\mu_\nu = 1$ でその他は 0 とする．これから直ちに $\{e^{*\mu}\}$ は V^* の基底となることがわかり， V の基底 $\{e_\mu\}$ に対する双対基底と呼ばれる．特に $\dim V = \dim V^*$ である．対応 $e_\mu \leftrightarrow e^{*\mu}$ は V から V^* への同型写像 (isomorphism) をあたえる．しかしこの同型写像は基底 $\{e_\mu\}$ の選び方に依存するので， V^* と V を同一視する自然な方法はない．

同様な方法でベクトル空間 V^* に対する双対な空間 (つまり V にたいして 2 重に双対なベクトル空間) を構成でき， $V^{**} = (V^*)^*$ と記そう． $(V^*)^*$ は元のベクトル空間 V と自然な形で同型である．ベクトル $v \in V$ にたいして， V^* から R の写像 $v^{**} \in V^{**}$ を次のように定義できる．任意の双対ベクトル $\omega^* \in V^*$ にたいして

$$v^{**}(\omega^*) = \omega^*(v)$$

と定義する．この様にすると V から V^{**} の 1 対 1 の線形写像が定義できるし，また $\dim V = \dim V^{**}$ であるので上への写像で，さらにこの写像 $V \rightarrow V^{**}$ は基底の選び方によらない．したがって V^{**} は V と自然に同一視できる．(最初に戻ると双対 (dual) の操作を 2 度繰り返すと元に戻るなので，双対という名称が適切)

2.3.2 テンソル

V を有限次元のベクトル空間，それに共役なベクトル空間を V^* とする． V 上のタイプ (k, l) のテンソル (*tensor*) T は次のような多重線型写

像である

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_k \times \underbrace{V \times \dots \times V}_l \rightarrow R$$

任意の $\chi^{*j}, \omega^{*1}, \dots, \omega^{*k} \in V^*$ と $u_i, v_1, \dots, v_l \in V$ および $\lambda, \mu \in R$ にたいして

$$\begin{aligned} & T(\omega^{*1}, \dots, \omega^{*k}; v_1, \dots, \lambda u_i + \mu v_i, \dots, v_l) \\ &= \lambda T(\omega^{*1}, \dots, \omega^{*k}; v_1, \dots, u_i, \dots, v_l) + \mu T(\omega^{*1}, \dots, \omega^{*k}; v_1, \dots, v_i, \dots, v_l) \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} & T(\omega^{*1}, \dots, \lambda \omega^{*j} + \mu \chi^{*j}, \dots, \omega^{*k}; v_1, \dots, v_l) \\ &= \lambda T(\omega^{*1}, \dots, \omega^{*j}, \dots, \omega^{*k}; v_1, \dots, v_l) + \mu T(\omega^{*1}, \dots, \chi^{*j}, \dots, \omega^{*k}; v_1, \dots, v_l) \end{aligned}$$

がみたされる (多重線形性) .

上記の定義に従うと, タイプ $(0, 1)$ のテンソルは双対ベクトルに他ならない, 同様にタイプ $(1, 0)$ のテンソルは V^{**} の元である. しかし我々は V^{**} を V と同一視したので, タイプ $(1, 0)$ のテンソルは通常のベクトルとなる.

タイプ (k, l) の全てのテンソルの集合 $\mathcal{T}(k, l)$ は, 和とスカラー倍にたいしてベクトル空間の構造を持つ. 多重線形性から, テンソルは V の基底 $\{e_\mu\}$ と V^* の双対基底 $\{e^{*\mu}\}$ にたいする値が定まればユニークに定まる. $\mathcal{T}(k, l)$ のベクトル空間としての次元は n^{k+l} (ここで $n = \dim V = \dim V^*$) である.

テンソルに対する2つの単純だが重要な操作を導入しよう. 最初のものは, i 番目の (双対ベクトルの) スロットと j 番目の (ベクトルの) とスロットに対する縮約 (contraction) とよばれ, $C : \mathcal{T}(k, l) \rightarrow \mathcal{T}(k-1, l-1)$ の写像で次のように定義される. T をタイプ (k, l) のあるテンソルとしたとき,

$$C(T) = \sum_{\sigma=1}^n T(\dots, e^{\sigma*}, \dots; \dots, e_\sigma, \dots) \quad (2.3.2)$$

ここで $\{e_\sigma\}$ は V のある基底で, $\{e^{\sigma*}\}$ はそれに対する共役な基底であり, これらのベクトルをテンソル T の i 番目と j 番目のスロットにいれて, 添字 σ について和を取る. この様にして得られたテンソル $C(T)$ は基底 $\{e_\mu\}$ の選び方に独立である.

テンソルに対する2番目の操作はテンソル積である. タイプ (k, l) のあるテンソル T とタイプ (k', l') の別のテンソル T' から, 次の規則でタイ

ブ $(k+k', l+l')$ の新しいテンソル $T \otimes T'$ を作ることができる. $(k+k')$ 個の双対ベクトル $v^{*1}, \dots, v^{*k+k'}$ と $(l+l')$ 個のベクトル $w_1, \dots, w_{l+l'}$ にたいして

$$\begin{aligned} T \otimes T'(v^{*1}, \dots, v^{*k+k'}; w_1, \dots, w_{l+l'}) \\ = T(v^{*1}, \dots, v^{*k}; w_1, \dots, w_l) T'(v^{*k+1}, \dots, v^{*k+k'}; w_{l+1}, \dots, w_{l+l'}) \end{aligned}$$

と定義する. これは T と T' のテンソル積 (*outer product*) と呼ばれる.

従ってテンソルを構成する一つの方法は複数のベクトルと複数の双対ベクトルのテンソル積をとることである. $\{e_\mu\}$ を V のある基底, $\{e^{*\nu}\}$ を対応する双対基底とすると, n^{k+l} 個の単純テンソル $\{e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_k} \otimes e^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes e^{*\nu_l}\}$ は $\mathcal{T}(k, l)$ の基底となることを容易に示せる. したがって, タイプ (k, l) のテンソル T は次のように単純テンソルの和で表すことができる.

$$T = \sum T^{\mu_1 \dots \mu_k \nu_1 \dots \nu_l} e_{\mu_1} \otimes \dots \otimes e_{\mu_k} \otimes e^{*\nu_1} \otimes \dots \otimes e^{*\nu_l} \quad (2.3.3)$$

基底展開係数 $T^{\mu_1 \dots \mu_k \nu_1 \dots \nu_l}$ はテンソル T の $\{e_\mu\}$ 基底に関する成分 (*components*) と呼ばれる.

成分表示では, 縮約とテンソル積は次の公式で表すことができる. テンソル T は式 (2.3.3) のように $T^{\mu_1 \dots \mu_k \nu_1 \dots \nu_l}$ という成分を持つとしよう. すると T の縮約 $C(T)$ の成分は

$$(C(T))^{\mu_1 \dots \mu_{k-1} \nu_1 \dots \nu_{l-1}} = \sum_{\sigma=1}^n T^{\mu_1 \dots \sigma \dots \mu_{k-1} \nu_1 \dots \sigma \dots \nu_{l-1}} \quad (2.3.4)$$

で与えられる. T' の成分が $T'^{\mu'_1 \dots \mu'_{k'} \nu'_1 \dots \nu'_{l'}}$ とすると, テンソル積 $S = T \otimes T'$ の成分は

$$S^{\mu_1 \dots \mu_{k+k'} \nu_1 \dots \nu_{l+l'}} = T^{\mu_1 \dots \mu_k \nu_1 \dots \nu_l} T'^{\mu_{k+1} \dots \mu_{k+k'} \nu_{l+1} \dots \nu_{l+l'}} \quad (2.3.5)$$

で与えられる.

2.3.3 多様体上のテンソル

前節までの議論は任意の有限次元のベクトル空間 V にあてはまる. 多様体 M の点 p での接ベクトル空間 $V_p(M)$ にあてはめて考察してみよう. この場合, 普通 $V_p^*(M)$ は p での余接空間 (*cotangent space*) とよば

れ, $V_p^*(M)$ のベクトルは余接ベクトル (*cotangent vector*) とよばれる. しばしば $V_p(M)$ 内のベクトルを反変 (*contravariant*) ベクトル, $V_p^*(M)$ 内のベクトルを共変 (*covariant*) ベクトルともよぶ. 2章2節で議論したように, ある座標系が与えられると $V_p(M)$ の座標基底を $\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n$ と構築できる. $V_p^*(M)$ の対応する双対基底は通常 dx^1, \dots, dx^n と表される. [dx^μ は $dx^\mu(\partial/\partial x^\nu) = \delta^\mu_\nu$ で定義される線型写像を表す記号]. 座標系を変換すると, ベクトル v の成分は, 既にベクトルの変換則で示したように

$$v'^{\mu'} = \sum_{\mu=1}^n v^\mu \frac{\partial x'^{\mu'}}{\partial x^\mu} \quad (2.3.6)$$

のように変換される.

双対テンソル ω の双対基底 $\{dx^\mu\}$ に対する成分を ω_μ とあらわすと, (2.3.1) と (2.3.6) 式から, 座標変換でその成分は

$$\omega'_{\mu'} = \sum_{\mu=1}^n \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^{\mu'}} \quad (2.3.7)$$

となることが示される. 一般にタイプ (k, l) のテンソル T の成分は

$$T'^{\mu'_1 \dots \mu'_k \nu'_1 \dots \nu'_l} = \sum_{\mu_1 \dots \mu_l} T^{\mu_1 \dots \mu_k \nu_1 \dots \nu_l} \frac{\partial x'^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x'^{\mu'_k}}{\partial x^{\mu_k}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_l}}{\partial x'^{\nu'_l}} \quad (2.3.8)$$

と変換する. 式 (2.3.8) はテンソルの変換則 (*tensor transformation law*) として知られる.

多様体 M の各点 p への $V_p(M)$ 上のテンソルの対応は, テンソル場と呼ばれる. 多様体上の関数と (反変) ベクトル場 v が滑らかであることの定義はすでにあてた. 共変ベクトル場 ω は, 任意の滑らかな (C^∞) ベクトル場 v にたいして関数 $\omega(v)$ が (多様体上で) 滑らかなとき, 滑らかであると定義する. タイプ (k, l) のテンソル場 T は, 任意の滑らかな共変ベクトル場 $\omega^1, \dots, \omega^k$ と任意の滑らかな反変ベクトル場 v_1, \dots, v_l にたいして $T(\omega^1, \dots, \omega^k; v_1, \dots, v_l)$ が滑らかな関数である時に, 滑らかであると定義する.

2.3.4 計量

計量 (metric) の概念を導入する. 直観的には計量は「無限小変位」と関係する「無限小2乗距離」のようなものである. 2章2節で述べたように

「無限小変位」は接ベクトルの概念に対応する．したがって「無限小 2 乗距離」は変位に対して 2 次であるべきなので，計量 g は $V_p(M) \times V_p(M)$ から実数への線型写像，つまりタイプ $(0, 2)$ のテンソルでなければならない．さらに計量は対称で非退化であることを要請される．対称 (*symmetric*) とは，任意の $v_1, v_2 \in V_p(M)$ にたいして $g(v_1, v_2) = g(v_2, v_1)$ が成り立つことを意味する．非退化 (*nondegenerate*) とは，すべての $v \in V_p(M)$ にたいして $g(v, v) = 0$ が成立するのは， $v = 0$ の時のみであることを意味する．したがって，多様体 M 上の計量 (*metric*) g とは対称で非退化なタイプ $(0, 2)$ のテンソル場である．言い換えると，計量は各点での接ベクトルの内積である (必ずしも正定値ではない) ．

座標基底では，ある計量 g は成分 $g_{\mu\nu}$ で次のように展開できる．

$$g = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu \quad (2.3.9)$$

ときどき計量テンソルを表すのに g のかわりに ds^2 が使われる．この場合 (2.3.9) を

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.3.10)$$

と書く．式 (2.3.10) の記法は，計量が「無限小 2 乗距離」を表すことの直観的な感觸を与えている．

ある計量 g が与えられた時，各点 p での接空間の正規直交基底 (*orthonormal basis*) e_1, \dots, e_n ，つまり $\mu \neq \nu$ ならば $g(e_\mu, e_\nu) = 0$ で， $\mu = \nu$ ならば $g(e_\mu, e_\nu) = \pm 1$ というものを見出すことができる．もちろん，点 p での正規直交基底の選び方は他にも多数あるが， $g(e_\mu, e_\mu) = +1$ となる基底ベクトルの数と， $g(e_\mu, e_\mu) = -1$ となる基底ベクトルの数は，正規直交基底の選び方とは独立である．この $+$ と $-$ の符号の数を，計量の符号数 (*signature*) とよぶ．ふつうの微分幾何では，正定値 (*positive definite*) 計量，つまり符号数 $++ \dots +$ の計量をあつかう．これにたいして時空間の計量の符号数は $-+++$ である．正定値計量はリーマン計量とよばれる；時空間のような符号数 (一つが負，残りが正) の計量はローレンツ計量とよばれる．

各点 $p \in M$ で計量 g は $V_p(M)$ 上のタイプ $(0, 2)$ のテンソル，つまり $V_p(M) \times V_p(M) \rightarrow \mathbf{R}$ の多重線型写像である．しかし， g は， $v \rightarrow g(\cdot, v)$ を通して， $V_p(M)$ から $V_p^*(M)$ への線型写像と見なすこともできる． g は非退化であるので，この写像は 1 対 1 で上への写像である．特に逆写像

が存在する．というわけで，我々は g をベクトルと双対ベクトルの1対1の対応を構成するために用いることができる．

コメント：paracompact な微分多様体には (1種類とは限らないが) Riemann 計量が存在することが証明できる．証明には単位の分割を使う．

paracompact な微分多様体で，さらに1次元の接分布が存在すれば，(1種類とは限らないが) Lorentz 計量が存在する．

2.4 抽象添字記法

前節ではテンソルの概念を導入し，テンソルに対するいくつかの操作を定義した．しかし最も単純な操作を行うだけでも，以下の理由から記法上の問題がおきる：

1. 高階のテンソルは多くのベクトルと双対ベクトルの関数である．縮約のような操作には，どのスロットが関係しているか追跡してなくてはならない．ある与えられたテンソルの特定の縮約を表示するために新しいシンボルを導入するのは極端に面倒になり，単純な操作でも非常に複雑に見えるようになってしまう．
2. 先に述べたように，ある与えられたテンソルは，様々な等価な方法で見なすことができる．観点によらず同じ表現になるような，単純で首尾一貫した表記の枠組みの採用が大事である．

多くの相対論のテキストややや古い微分幾何学のテキストで使われているのは以下のような記法である．2章3節で述べたように，基底を導入すると，テンソルを成分 $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ で特徴づけることができる．この記法はこれらの成分で全ての方程式を書き下すというものである．この方法で上記 (1),(2) の問題を解決できる．

しかし，この成分記法には重大な欠陥もある．もし使う基底をどのように選ぶか特定しなければ，書き下された方程式は，基底と独立した意味を持つ，正しいテンソル方程式となるだろう．しかしいくつかの場合には，特定の時空間の対称性を反映した，特定の基底を使うのが便利だろう．その場合，テンソルの成分で書き下した方程式はこの基底でのみ有効である．テンソルについて成り立つ方程式と，特定の基底にのみあてはまるテンソルの成分にたいする方程式を，明確に区別することは大事である．しかし成分記法ではこの区別が曖昧になる．

そこで今後、抽象添字記法 (*abstract index notation*) を採用しよう。実際には単に成分記法を少し変えただけのものである。規則は次のようである。タイプ (k, l) のテンソルは、文字に k 個の反変および l 個の共変のラテン小文字の添字をつけて $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ のように表すこととする。このようにして、例えば T^{abc}_{de} はタイプ $(3, 2)$ のテンソルを表す。どのスロットにも任意のラテン小文字を置くことができるが、方程式の両辺の対応するスロットには対応する同じ文字を使わなければならない。テンソルの縮約は、式 (2.3.4) の成分表示を反映して (ただし総和記号は省略)、縮約するスロットに繰り返し同じ文字を使うことであらわす。このようにして、 T^{abc}_{de} を 2 番目の反変ベクトルと 1 番目の共変ベクトルのスロットについて縮約して得られた T^{abc}_{be} はタイプ $(2, 1)$ のテンソルを表す。2 つのテンソルのテンソル積は単純にそれらを隣接して表す。つまり、 T^{abc}_{de} と S^a_b のテンソル積をとって得られる $T^{abc}_{de} S^f_g$ はタイプ $(4, 3)$ のテンソルを表す。

添字記法を用いると、基底を導入してないので、正しいテンソル方程式を書き下すことができる。基底を導入すれば、もちろん成分がえられるし、それらについての方程式を書くこともできる。成分についての方程式と、添字記法でのテンソル方程式を区別するため、次のような規約をとろう。成分記法での成分の添字はギリシャ文字であらわす。例えば $T^{\mu\nu\lambda}_{\sigma\rho}$ は、テンソル T^{abc}_{de} のある基底での成分を表すとする。

計量 g はタイプ $(0, 2)$ のテンソルなので g_{ab} と表される。ベクトル v^a に計量をほどこすと、双対ベクトル $g_{ab}v^b$ を得る。このベクトルを単に $v_a (= g_{ab}v^b)$ と表すのが便利である。こうすると、 g_{ab} で定義された、 $V_p(M)$ と $V_p^*(M)$ の同型写像が、記号の上でも明確になる。 g_{ab} の逆 (g_{ab} は非退化なので逆が存在) はタイプ $(2, 0)$ のテンソルで $(g^{-1})^{ab}$ と表すことができるだろう。しかし、逆符号を省略して単に g^{ab} と表す方が便利である。これによって混乱が起きる恐れはない。定義から $g^{ab}g_{bc} = \delta^a_c$ で、 δ^a_c は ($V_p(M)$ から $V_p(M)$ への写像と見なすと) 恒等写像である。双対ベクトル ω_a に逆計量をほどこして得られたベクトル $g^{ab}\omega_b$ を単に ω^a と表す。例えばタイプ $(3, 2)$ のテンソル T^{abc}_{de} にたいして、 $T^a_b{}^{cde}$ は $g_bf g^{dh} g^{ej} T^{afc}_{hj}$ を表している。この記法は自己整合的である：計量テンソルを使ってある添字の上げ下げを続けて行くと元のテンソルと一致する。

添字記法はテンソルの対称性を表現するために用いることができる。タイプ $(0, 2)$ のテンソル T_{ab} はベクトル対 (v^a, w^a) を数 $T_{ab}v^aw^b$ に変換する。 T_{ab} が作用するこのベクトル対の順序を入れ替えることで得られる、

新しいテンソル (ベクトル対 (v^a, w^a) を数 $T_{ab}v^bw^a$ に変換) を考えたい . 添字記法ではこの新しいテンソルは T_{ba} と表示される . そこで , 例えば式 $T_{ab} = T_{ba}$ が成り立つときにはテンソル T_{ab} は対称であるという . より高階のタイプのテンソルの共変または反変の添字の任意の対について , 同様な表記上の規則が当てはまる .

テンソルの完全対称または完全反対称な部分にたいする表記法を導入すると便利である , タイプ $(0, 2)$ のテンソル T_{ab} に対して ,

$$T_{(ab)} = \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba}) \quad (2.4.1)$$

$$T_{[ab]} = \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba}) \quad (2.4.2)$$

と定義する . より一般にタイプ $(0, l)$ のテンソル $T_{a_1 \dots a_l}$ にたいして

$$T_{(a_1 \dots a_l)} = \frac{1}{l!} \sum_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}} \quad (2.4.3)$$

$$T_{[a_1 \dots a_l]} = \frac{1}{l!} \sum_{\pi} \delta_{\pi} T_{a_{\pi(1)} \dots a_{\pi(l)}} \quad (2.4.4)$$

と定義する . ここで総和は $1, \dots, l$ の全ての置換 π についてとっており , また δ_{π} は偶置換で 1 , 奇置換で -1 とする . 同様な定義を共変または反変の添字に対して行うことができる . 例えば

$$T^{(ab)c}_{[de]} = \frac{1}{4}[T^{abc}_{de} + T^{bac}_{de} - T^{abc}_{ed} - T^{bac}_{ed}] \quad (2.4.5)$$

を得る .

タイプ $(0, l)$ の完全反対称なテンソル場 $T_{a_1 \dots a_l}$

$$T_{a_1 \dots a_l} = T_{[a_1 \dots a_l]} \quad (2.4.6)$$

は微分 1 形式 (*differential 1-form*) と呼ばれる .

第3章 曲率

我々の曲率の直観的な概念は、おもに3次元のユークリッド空間に埋め込まれた2次元曲面からきている。しかし、計量 g_{ab} をもつ我々の時空間の多様体 M は高次元多様体に自然には埋め込まれていない。したがって高次元空間への埋め込みなしに、任意の多様体にあてはまる曲率の内在的 (*intrinsic*) な概念を定義したい。

そのような曲率の概念は平行移動で定義できる。平面や球面上で、ある経路に沿ってベクトルを移動するときに、ベクトルが「同一方向を向く」(しかし常に多様体の接空間内にある) ように保つことの直観的な概念を我々は持っている。平面では、どのような閉曲線に沿ってベクトルを平行移動しても、最初のベクトルと最後のベクトルは一致する。しかし球面ではこの様にはならない。図 3.2 のような経路に沿って移動したベクトルは、最初のベクトルに対して回転している。この例から多様体の曲率を特徴づけるのに、曲線に沿ってベクトルがどのように「平行移動」するか調べればよいであろう。

曲率の別の特徴付けは次のようにしてもできる。測地線とは、その曲線の接ベクトルが曲線に沿って平行移動されるような、「可能な限りまっすぐな」曲線である。最初は平行だった測地線が平行に留まれなくなる時(ユークリッドの第5公準が破れているとき)かつその時に限り、空間は曲がっている。

空間の多様体としての構造を与えただけでは、平行移動を自然には定義できない。その理由は、2つの異なる点 p と q の接空間 $V_p(M)$ と $V_q(M)$ は異なるベクトル空間であること、それゆえ p におけるベクトルが q におけるベクトルと同じといえないからである。したがって、平行移動の定義には多様体の構造以上のものが要求される。どのようにベクトルを平行移動するかという概念は、ベクトル場の微分をどのようにとるかと言う知識と等価であることは納得しやすい。曲線に沿ってベクトルを平行移動させる方法がわかれば、曲線の方向へのベクトル場の微分が定義できる。同様に微分概念が与えられれば、与えられた曲線に沿ったベク

トルの微分が0ということから，ベクトルの平行移動が定義できる．微分演算子の概念から出発するのが最も便利である．微小な閉曲線のまわりでベクトルを平行移動したときに元に戻らないことは，複数の微分の交換ができないと解釈される．したがって，曲率の概念は，テンソル場についての微分を繰り返す操作が交換しないということで，定義できる．これが3章2節への道筋である．

平行移動または微分演算子を定義するのに必要なこの余分な構造は，どこから由来するのだろうか？3章1節では，計量が与えられたとき，全てのベクトル対の内積を保存する平行移動はユニークに定義されることを示す．したがって，計量の存在は，平行移動のユニークな概念を導き，多様体の曲率の内在的な概念を導く．これが我々が関心を持つ時空間 (M, g_{ab}) の曲率の概念である．

3章1節で，微分演算子と平行移動を定義し，3章2節で曲率を定義する．3章3節では測地線を導入し，測地線の偏差方程式（当初は平行だった複数の測地線が平行では無くなることから曲率を特徴づける）を導く．

3.1 微分演算子と平行移動

多様体 M 上の微分演算子 (*derivative operator*) (共変微分 (*covariant derivative*) と呼ばれる) ∇ とは，タイプ (k, l) の滑らかなテンソル場をタイプ $(k, l+1)$ の滑らかなテンソル場に写す写像で，以下に記す5つの条件を満たすものである．添字記法で $T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} \in \mathcal{T}(k, l)$ とすると， ∇ を T に作用させて得られるテンソル場を $\nabla_c T^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$ で表すことにしよう．添字を直接に微分演算子に付けて ∇_a のように書くことは，記法上しばしば便利であるが，添字記法の若干の乱用でもある (∇_a は双対ベクトルではないので)．添字記法で表したとき，微分演算子に要求される5つの条件とは

1. 線形性:

任意の $A, B \in \mathcal{T}(k, l)$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\nabla_c (\alpha A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}) = \alpha \nabla_c A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} + \beta \nabla_c B^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}$$

2. Leibnitz 則:

任意の $A \in \mathcal{T}(k, l)$, $B \in \mathcal{T}(k', l')$ に対して

$$\begin{aligned} & \nabla_e [A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} B^{c_1 \dots c_{k'}}_{d_1 \dots d_{l'}}] \\ &= [\nabla_e A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l}] B^{c_1 \dots c_{k'}}_{d_1 \dots d_{l'}} + A^{a_1 \dots a_k}_{b_1 \dots b_l} [\nabla_e B^{c_1 \dots c_{k'}}_{d_1 \dots d_{l'}}] \end{aligned}$$

3. 縮約と交換可能:

任意の $A \in \mathcal{T}(k, l)$ に対して

$$\nabla_d (A^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}) = \nabla_d A^{a_1 \dots c \dots a_k}_{b_1 \dots c \dots b_l}$$

4. スカラー場の方向微分として接ベクトルの概念と整合:

任意の $f \in \mathcal{F}(M)$ と $t^a \in V_p(M)$ に対して

$$t(f) = t^a \nabla_a f$$

5. 捩率ゼロ (Torsion free): 任意の $f \in \mathcal{F}(M)$ に対して

$$\nabla_a \nabla_b f = \nabla_b \nabla_a f$$

5番目の条件は時々落とされることがあるし、実際この条件が課されない重力理論もある。しかし、一般相対性理論では、微分演算子が5番目の条件を満たすことを前提とする（この条件は等価原理を反映している）

注目すべきことに、条件4と5およびライプニッツ則から、2つのベクトル場 v^a, w^b の交換子に対して、微分演算子 ∇_a による簡単な表現を導くことができる。任意の滑らかな関数 f に当てはめて

$$\begin{aligned} [v, w](f) &= v\{w(f)\} - w\{v(f)\} \\ &= v^a \nabla_a (w^b \nabla_b f) - w^a \nabla_a (v^b \nabla_b f) \\ &= \{v^a \nabla_a w^b - w^a \nabla_a v^b\} \nabla_b f \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

したがって

$$[v, w]^b = v^a \nabla_a w^b - w^a \nabla_a v^b \quad (3.1.2)$$

を得る。

まず最初に、(上記の条件を満たす) 微分演算子が存在することを示そう。 ψ をある座標系として、それに伴う座標基底を $\{\partial/\partial x^\mu\}$ と $\{dx^\mu\}$ としよう。するとこれらの座標系で被われる領域では通常微分 (ordinary derivative) ∂_a とよばれる微分演算子を次のように定義できるだろう。任意の滑ら

かなテンソル場 $T^{a_1 \cdots a_k}_{b_1 \cdots b_l}$ に対してこの座標基底での成分を $T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l}$ ととり, $\partial_c T^{a_1 \cdots a_k}_{b_1 \cdots b_l}$ を, この座標基底での成分が $\partial(T^{\mu_1 \cdots \mu_k}_{\nu_1 \cdots \nu_l})/\partial x^\sigma$ であるようなテンソルと定義する. 5つの条件全ては, 偏微分の標準的な性質から直ちに導かれる. 実際, (複数の) 偏微分が交換することから, 5番目の条件はスカラー場に限らず, 全てのテンソル場について成立する. このようにして, ある座標系 ψ に対して, それに伴う微分演算子 ∂_a を構築することができる. もちろん, 別の座標系 ψ' をとると異なる微分演算子 ∂'_a を得る. 言い換えると, テンソル $\partial_c T^{a_1 \cdots a_k}_{b_1 \cdots b_l}$ の新しい座標での成分は, $T^{a_1 \cdots a_k}_{b_1 \cdots b_l}$ を新しい座標で偏微分したものとは等しくない. このように, 通常微分演算子は座標に依存するので, 多様体の構造に自然に伴うものではない.

微分演算子はどこまでユニークだろうか? 条件 (4) から任意の2つの微分演算子 ∇_a と $\tilde{\nabla}_a$ は, スカラー場に対する作用では一致しなければならない. より高階のテンソルではこの2つは異なる可能性があるが, それを調べるため ω_b を双対ベクトル場とし, 任意のスカラー場 f にたいして, 差 $\tilde{\nabla}_a(f\omega_b) - \nabla_a(f\omega_b)$ を考察しよう. Leibnitz 則から

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a(f\omega_b) - \nabla_a(f\omega_b) &= (\tilde{\nabla}_a f)\omega_b + f\tilde{\nabla}_a\omega_b - (\nabla_a f)\omega_b - f\nabla_a\omega_b \\ &= f(\tilde{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b) \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

を得る (ここで性質 (4) を使った). 点 p で $\tilde{\nabla}_a\omega_b$ と $\nabla_a\omega_b$ は, ω_b が p から離れたときにどのように変化するかには依存している. しかし, 式 (3.1.3) からそれらの差 $\tilde{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b$ は点 p での ω_b の値のみに依存している.

補題. $\tilde{\nabla}_a\omega_b - \nabla_a\omega_b$ は点 p での ω_b の値のみで決る. 言い換えると ω'_b を点 p で ω_b と一致する双対ベクトル場としたとき, ω_b を ω'_b に置き換えても同じ結果を得る.

証明. $\omega'_b - \omega_b$ は点 p で0になるので, (2章の問題2を使うと) 点 p で0となる滑らかな関数 $f^{(\alpha)}$ と滑らかな双対ベクトル場 $\mu_b^{(\alpha)}$ で

$$\omega'_b - \omega_b = \sum_{\alpha=1}^n f^{(\alpha)} \mu_b^{(\alpha)} \quad (3.1.4)$$

を満たすものを見出すことができる. 式 (3.1.3) を使うと, 点 p で

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_a(\omega'_b - \omega_b) - \nabla_a(\omega'_b - \omega_b) &= \sum_{\alpha} \{ \tilde{\nabla}_a(f^{(\alpha)} \mu_b^{(\alpha)}) - \nabla_a(f^{(\alpha)} \mu_b^{(\alpha)}) \} \\ &= \sum_{\alpha} f^{(\alpha)} (\tilde{\nabla}_a \mu_b^{(\alpha)} - \nabla_a \mu_b^{(\alpha)}) = 0 \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

をえる．ここで p で $f_{(a)} = 0$ となることを使っている．このようにして

$$\tilde{\nabla}_a \omega'_b - \nabla_a \omega'_b = \tilde{\nabla}_a \omega_b - \nabla_a \omega_b \quad (3.1.6)$$

となった．□

このようにして， $\tilde{\nabla}_a - \nabla_a$ は， p での双対ベクトルから p でのタイプ $(0, 2)$ のテンソルへの写像を定義することを示した．性質 (1) からこの写像は線形である．したがって $(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)$ は p でのタイプ $(1, 2)$ のテンソルを定義するので，今後これを C^c_{ab} と記述しよう．我々が示したのは，任意の 2 つの微分演算子 $\tilde{\nabla}_a$ と ∇_a にたいして，

$$\nabla_a \omega_b = \tilde{\nabla}_a \omega_b - C^c_{ab} \omega_c \quad (3.1.7)$$

を満たすテンソル場 C^c_{ab} が存在するということである．

条件 (5) から C^c_{ab} の対称性の性質が導かれる． $\omega_b = \nabla_b f = \tilde{\nabla}_b f$ とおくと

$$\nabla_a \nabla_b f = \tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f - C^c_{ab} \nabla_c f \quad (3.1.8)$$

を得る． $\nabla_a \nabla_b f$ も $\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b f$ も，添字 a と b について対称なので，

$$C^c_{ab} = C^c_{ba} \quad (3.1.9)$$

でなければならない．もちろん，式 (3.1.9) は，捩れなしの要請がなければ成り立つ必要はない．

ベクトル場や高階のテンソルに対する $\tilde{\nabla}_a$ と ∇_a の作用の違いは式 (3.1.7) とライプニッツ則と性質 (4) から決められる．ベクトル場 t^a と双対ベクトル場 ω_a にたいして，性質 (4) から

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(\omega_b t^b) = 0 \quad (3.1.10)$$

一方，ライプニッツ則から

$$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)(\omega_b t^b) = (C^c_{ab} \omega_c) t^b + \omega_b (\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) t^b \quad (3.1.11)$$

したがって，縮約した添字について添字を置き換えることで，任意の ω_b にたいして

$$\omega_b [(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a) t^b + C^b_{ac} t^c] = 0 \quad (3.1.12)$$

を得る．これは

$$\nabla_a t^b = \tilde{\nabla}_a t^b + C^b_{ac} t^c \quad (3.1.13)$$

を意味する．

同様な方法を続けて，任意のテンソル場に対する ∇_a の作用を， $\tilde{\nabla}_a$ と C^c_{ab} で表す一般公式を導くことができる． $T \in \mathcal{T}(k, l)$ に対して

$$\begin{aligned} \nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} &= \tilde{\nabla}_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} + \sum_i C^{b_i}_{ad} T^{b_1 \dots d \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} \\ &\quad - \sum_j C^d_{ac_j} T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots d \dots c_l} \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

を得る．この様にして，2つの微分演算子 ∇_a と $\tilde{\nabla}_a$ の差は，テンソル場 C^c_{ab} で完全に特徴付けられる．逆に，もし $\tilde{\nabla}_a$ が微分演算子で C^c_{ab} が下付き添字に対して対称な任意の滑らかなテンソル場であれば，(3.1.14) で定義される ∇_a も微分演算子になることを確認するのは難しくない．微分演算子の選択には非常に大きな自由度が残されている，というのも n 次元多様体上の C^c_{ab} には $n^2(n+1)/2$ の独立な成分があるからである．

方程式 (3.1.14) の最も重要な応用は， $\tilde{\nabla}_a$ が通常微分演算子 ∂_a である場合に出てくる．この場合，テンソル場 C^c_{ab} は Γ^c_{ab} と表され，クリストッフェル記号 (*Christoffel symbol*) とよばれる．例えば

$$\nabla_a t^b = \partial_a t^b + \Gamma^b_{ac} t^c \quad (3.1.15)$$

ある座標系に伴う通常微分の計算法は分かっているので，式 (3.1.15) は Γ^b_{ac} が分かったとき，微分 ∇_a を計算する手続きを示している．

ある微分演算子 ∇_a が与えられたとき（接ベクトル t^a を伴う）曲線 C に沿った，ベクトルの平行移動の概念を定義できる．曲線上の各点で与えられたベクトル v^a は，曲線に沿って方程式

$$t^a \nabla_a v^b = 0 \quad (3.1.16)$$

を満たすように移動したとき平行移動された (*parallelly transported*) とよばれる．より一般に，テンソルの平行移動は

$$t^a \nabla_a T^{b_1 \dots b_k}_{c_1 \dots c_l} = 0 \quad (3.1.17)$$

と定義できる．

ある座標系を選んで (3.1.15) を用いると，(3.1.16) は

$$t^a \partial_a v^b + t^a \Gamma^b_{ac} v^c = 0 \quad (3.1.18)$$

または、座標基底の成分表示と、曲線に沿ったパラメーター t を使うと

$$\frac{dv^\nu}{dt} + \sum_{\mu,\lambda} t^\mu \Gamma^\nu_{\mu\lambda} v^\lambda = 0 \quad (3.1.19)$$

と表すことができる。これは、 v^a の平行移動は、曲線上の v^a の値のみに依存することを示している。さらに、常微分方程式の性質から、任意の初期値 v^a について (3.1.19) はユニークな解を持っている。したがって、曲線上の点 p でのベクトルは、曲線の他の部分での「平行移動されたベクトル」をユニークに定義する。我々はこの平行移動の概念を使って、微分演算子及び p と q を結ぶ曲線が与えられたとき、接空間 $V_p(M)$ と接空間 $V_q(M)$ を同一視することができるだろう。このような、異なる点での接ベクトル空間の（曲線に依存した）同一視から由来する数学的構造は接続 (*connection*) と呼ばれる。

上で見たように、多様体の構造を与えただけでは、多数の別個の微分演算子が可能で、どれかが他のものに比べてより自然ということはない。しかし、多様体上にある計量 g_{ab} が与えられると、複数の微分演算子の中で自然なものがユニークに決められる。2つのベクトル v^a と w^a が与えられた時、それらの内積 $g_{ab}v^a w^b$ が任意の曲線に沿って平行移動しても不変なように要請する。つまり (3.1.16) を満たす v^b と w^c にたいして

$$t^a \nabla_a (g_{bc} v^b w^c) = 0 \quad (3.1.20)$$

が成り立つものとする。ライプニッツ則を用いると

$$t^a v^b w^c \nabla_a g_{bc} = 0 \quad (3.1.21)$$

式 (3.1.21) が、全ての曲線と平行移動されたベクトルに対して成り立つのは

$$\nabla_a g_{bc} = 0 \quad (3.1.22)$$

が成り立つとき、かつその時のみである。これを ∇_a に対する付加条件にしたい。この式が ∇_a をユニークに決めることは、次の定理から示される。

定理 3.1.1. g_{ab} をある計量とする。すると $\nabla_a g_{bc} = 0$ を満たすような微分演算子 ∇_a がユニークに存在する。

証明. $\tilde{\nabla}_a$ を任意の微分演算子、例えばある座標系に伴う通常微分演算子とする。 $\tilde{\nabla}_a$ と C^c_{ab} で決まる微分演算子が要求される性質を満足する

ような C^c_{ab} を解いてみよう． C^c_{ab} にはただ一つの解しか存在しないことを示すことで，定理を証明しよう．

方程式 (3.1.14) から C^c_{ab} は

$$0 = \nabla_a g_{bc} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} - C^d_{ab} g_{dc} - C^d_{ac} g_{bd} \quad (3.1.23)$$

を満たさなければならない．つまり

$$C_{cab} + C_{bac} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} \quad (3.1.24)$$

添字を交換することで

$$C_{cba} + C_{abc} = \tilde{\nabla}_b g_{ac} \quad (3.1.25)$$

$$C_{bca} + C_{acb} = \tilde{\nabla}_c g_{ab} \quad (3.1.26)$$

も得られる．式 (3.1.24) に (3.1.25) を加え，式 (3.1.26) を引こう． C^c_{ab} の対称性 (3.1.9) を使うと

$$2C_{cab} = \tilde{\nabla}_a g_{bc} + \tilde{\nabla}_b g_{ac} - \tilde{\nabla}_c g_{ab} \quad (3.1.27)$$

を見出す．つまり

$$C^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \{ \tilde{\nabla}_a g_{bd} + \tilde{\nabla}_b g_{ad} - \tilde{\nabla}_d g_{ab} \} \quad (3.1.28)$$

このように C^c_{ab} を選ぶと (3.1.22) を満足し，また明かにユニークである．従って定理が証明された．□

このようにして，ある計量 g_{ab} は，微分演算子 ∇_a を自然に定める．これ以降，計量が与えられているときには，((3.1.22) を満たすような) この自然な微分演算子を選ぶ．さらに，(3.1.14) と (3.1.28) は，任意の微分演算子 $\tilde{\nabla}_a$ から ∇_a を計算する手続きを示している．特に，通常微分演算子を使うとクリストッフェル記号は

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} g^{cd} \{ \partial_a g_{bd} + \partial_b g_{ad} - \partial_d g_{ab} \} \quad (3.1.29)$$

で，したがってクリストッフェル記号の座標基底成分は

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_\sigma g^{\rho\sigma} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right\} \quad (3.1.30)$$

である．

3.2 曲率 (curvature)

前節では、与えられたある微分演算子に対し、曲線 C に沿って点 p から q までベクトルを平行移動する手続きが存在することを示した。しかし、 $V_p(M)$ のベクトルからこの平行移動で得た $V_q(M)$ のベクトルは、一般にはそれらをつなぐ曲線の選び方に依存する。平行移動の経路の依存性を曲率の概念を定義するのに用いることができる。この節ではこのプログラムを実行するのに、双対ベクトル場に複数の微分操作を続けて施したときに交換しないことから、Riemann 曲率テンソルを定義することで始める。それからこのテンソルが平行移動の経路依存性に直接関係することを確かめる。次の節では Riemann テンソルが曲率の他の特性：つまり、当初は平行だった測地線が平行に留まることができない、ことを完全に記述することを示す。

∇_a を微分演算子とする。 ω_a を双対ベクトル場とし、 f を滑らかな関数とする。 $f\omega_a$ に2つの微分演算子を施した作用を計算すると

$$\begin{aligned}\nabla_a \nabla_b (f\omega_c) &= \nabla_a (\omega_c \nabla_b f + f \nabla_b \omega_c) \\ &= (\nabla_a \nabla_b f) \omega_c + \nabla_b f \nabla_a \omega_c + \nabla_a f \nabla_b \omega_c + f \nabla_a \nabla_b \omega_c\end{aligned}\quad (3.2.1)$$

この結果から $\nabla_b \nabla_a (f\omega_c)$ を引くと、式 (3.2.1) の右辺の最初の3項は $\nabla_b \nabla_a (f\omega_c)$ の対応する項と打ち消し合うので、

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)(f\omega_c) = f(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c\quad (3.2.2)$$

と言う簡単な結果を得る。微分演算子で行ったのと同じ理由で (方程式 (3.1.3) を参考)、点 p でのテンソル $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)\omega_c$ は、点 p での ω_c の値にのみ依存する。したがって $(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a)$ は、点 p での双対ベクトルから、点 p でのタイプ $(0, 3)$ のテンソルへの線形写像を定義している。このことは、任意の双対ベクトル場 ω_c にたいして

$$\nabla_a \nabla_b \omega_c - \nabla_b \nabla_a \omega_c = R_{abc}{}^d \omega_d\quad (3.2.3)$$

となるようなテンソル場 $R_{abc}{}^d$ が存在することを示したことになる。 $R_{abc}{}^d$ は Riemann 曲率テンソルと呼ばれる。

最初に $R_{abc}{}^d$ が、微小な閉曲線の回りでベクトルを平行移動したときに元に戻らないことと関係することを示そう。次のようにして $p \in M$ での微小な閉じたループを構築しよう： p を通る2次元面 S を選び面上の座標 t と s を選ぶ。次のループを考える：図 3.3 に示すように $s = 0$ の曲

線に沿って Δt 移動し, 次に $t = \Delta t$ の曲線に沿って Δs 移動し, さらに Δt と Δs 移動して元に戻る. v^a を点 p でのベクトル (必ずしも S に接してない) とし, この閉ループの回りでベクトル v^a を平行移動する. v^a の変化分を計算する最も簡単な方法は, ω_a を任意の双対ベクトル場として, ループを横断するときのスカラー $v^a \omega_a$ の変化を調べることである. 微小な Δt に対して, 経路の最初の部分での $v^a \omega_a$ の変化 δ_1 は

$$\delta_1 = \Delta t \frac{\partial}{\partial t} (v^a \omega_a) |_{(\Delta t/2, 0)} \quad (3.2.4)$$

なお, 中間点で微分を評価することで, 変位 Δt の2次のオーダーまで正しい表現となるように保証した. δ_1 を次のように書き直す

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \Delta t T^b \nabla_b (v^a \omega_a) |_{(\Delta t/2, 0)} \\ &= \Delta t v^a T^b \nabla_b \omega_a |_{(\Delta t/2, 0)} \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

ここで T^b は s が定数の曲線への接ベクトルで, また式 (3.1.16) から $T^b \nabla_b v^a = 0$ である. 経路の他の部分での $\delta_2, \delta_3, \delta_4$ の変化についても同様な表現が成り立つ. 2つの「 Δt の変化」, δ_1 と δ_3 を組み合わせると

$$\delta_1 + \delta_3 = \Delta t \{ v^a T^b \nabla_b \omega_a |_{(\Delta t/2, 0)} - v^a T^b \nabla_b \omega_a |_{(\Delta t/2, \Delta s)} \} \quad (3.2.6)$$

となる. δ_2 と δ_4 の組み合わせも同様である. 括弧の中の項は $\Delta s \rightarrow 0$ で消えるので, Δt と Δs の1次の項までは, $v^a \omega_a$ の全体の変化分 (したがって v^a 全体の変化分) は消える. つまり, Δt と Δs の1次のオーダーまでは平行移動は経路に依存しない. $v^a \omega_a$ の2次のオーダーまでの変化を計算するためには, (3.2.6) の括弧の中の項を1次まで評価する必要がある. 次のような手順でこれをおこなおう: $t = \Delta t/2$ という曲線を考え, この曲線に沿って $(\Delta t/2, 0)$ から $(\Delta t/2, \Delta s)$ までの v^a と $T^b \nabla_b \omega_a$ の平行移動を考える. Δs の1次の項までで, $(\Delta t/2, \Delta s)$ での v^a と, 曲線に沿って $(\Delta t/2, 0)$ へ平行移動した v^a は等しい (曲線上の平行移動は1次のオーダーまで経路に依存しないので). 一方, 1次のオーダーまでで, $(\Delta t/2, \Delta s)$ での $T^b \nabla_b \omega_a$ は, 曲線に沿って $(\Delta t/2, 0)$ から平行移動したものの $(T^b \nabla_b \omega_a)$ とは $\Delta s S^c \nabla_c (T^b \nabla_b \omega_a)$ (S^c は t 定数の曲線への接ベクトル) だけ異なる. このようにして, $\Delta t, \Delta s$ の2次の項までで

$$\delta_1 + \delta_3 = -\Delta t \Delta s v^a S^c \nabla_c (T^b \nabla_b \omega_a) \quad (3.2.7)$$

を見出した．ここまでの精度で p での全てのテンソルを評価できる． δ_2 と δ_4 の同様な寄与を加えると， $v^a \omega_a$ の全体の変化は

$$\begin{aligned}\delta(v^a \omega_a) &= \Delta t \Delta s v^a \{T^c \nabla_c (S^b \nabla_b \omega_a) - S^c \nabla_c (T^b \nabla_b \omega_a)\} \\ &= \Delta t \Delta s v^a T^c S^b (\nabla_c \nabla_b - \nabla_b \nabla_c) \omega_b \\ &= \Delta t \Delta s v^a T^c S^b R_{cba}{}^d \omega_d\end{aligned}\quad (3.2.8)$$

この式の2行目で座標ベクトル場 T^a と S^a が交換する事実を使い (2章2節と (3.1.2) 参照)，また最後の行で Riemann のテンソル方程式 (3.2.3) の定義を使った．しかし，式 (3.2.8) が任意の ω_a についてなりたつのは， v^a の全変化が (Δt と Δs の2次のオーダーの精度までで)

$$\delta v^a = \Delta t \Delta s v^d T^c S^b R_{cbd}{}^a \quad (3.2.9)$$

となる場合に限り，かつその時のみである．これが望む結果である．これで Riemann テンソルで，平行移動の経路依存性を測ることができることを示した．

式 (3.2.3) を用いると (式 (3.1.14) を導いたのと全く同様な手続きで) 任意のテンソル場に対しての微分演算子の交換子の作用を，Riemann テンソルを用いて表すことができる．あるベクトル場 t^a にたいする表現を見つけるため， ω_a をある双対ベクトル場とする．微分演算子の性質 5 とライプニッツ則と式 (3.2.3) を用いると

$$\begin{aligned}0 &= (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) (t^c \omega_c) \\ &= \nabla_a (\omega_c \nabla_b t^c + t^c \nabla_b \omega_c) - \nabla_b (\omega_c \nabla_a t^c + t^c \nabla_a \omega_c) \\ &= \omega_c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c + t^c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \omega_c \\ &= \omega_c (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c + t^c \omega_d R_{abc}{}^d\end{aligned}\quad (3.2.10)$$

したがって

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) t^c = -R_{abd}{}^c t^d \quad (3.2.11)$$

を得る．数学的帰納法から，任意のテンソル場 $T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l}$ にたいして

$$\begin{aligned}(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} &= - \sum_{i=1}^k R_{abe}{}^{c_i} T^{c_1 \dots e \dots c_k}{}_{d_1 \dots d_l} \\ &\quad + \sum_{j=1}^l R_{abd_j}{}^e T^{c_1 \dots c_k}{}_{d_1 \dots e \dots d_l}\end{aligned}\quad (3.2.12)$$

を見出す．

ここで，Riemann テンソルの4つの重要な性質を示そう．

1.

$$R_{abc}{}^d = -R_{bac}{}^d \quad (3.2.13)$$

2.

$$R_{[abc]}{}^d = 0 \quad (3.2.14)$$

3. 計量に自然に伴う微分演算子 ∇_a ($\nabla_a g_{bc} = 0$ を満たすもの) に対し

$$R_{abcd} = -R_{abdc} \quad (3.2.15)$$

4. Bianchi 恒等式

$$\nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0 \quad (3.2.16)$$

性質 (1) は $R_{abc}{}^d$ の定義 (3.2.3) からすぐに導かれる．性質 (2) を示すため，任意の双対ベクトル場 ω_a と任意の微分演算子 ∇_a にたいして

$$\nabla_{[a} \nabla_b \omega_c] = 0 \quad (3.2.17)$$

となることに注意しよう．この方程式の証明には，式 (3.1.14) で $\tilde{\nabla}_a$ を通常微分 ∂_a でおきかえ，通常微分の交換性および $C^c{}_{ab} = \Gamma^c{}_{ab}$ から (3.1.9) の対称性を用いる．したがって，任意の ω_d にたいして

$$0 = 2\nabla_{[a} \nabla_b \omega_c] = \nabla_{[a} \nabla_b \omega_c] - \nabla_{[b} \nabla_a \omega_c] = R_{[abc]}{}^d \omega_d \quad (3.2.18)$$

を得る．これで性質 (2) が示された．

性質 (3) は，式 (3.2.12) を計量 g_{ab} に当てはめて得られる．

$$0 = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) g_{cd} = R_{abc}{}^e g_{ed} + R_{abd}{}^e g_{ce} = R_{abcd} + R_{abdc} \quad (3.2.19)$$

性質 1,2,3 から Riemann テンソルは次のような有用な対称性を満たす．

$$R_{abcd} = R_{cdab} \quad (3.2.20)$$

最後に，性質 (4) の Bianchi 恒等式を示すため，微分演算子の交換子のある双対ベクトル場の微分に適応する．式 (3.2.12) を用いて

$$(\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) \nabla_c \omega_d = R_{abc}{}^e \nabla_e \omega_d + R_{abd}{}^f \nabla_c \omega_f \quad (3.2.21)$$

が得られる．一方

$$\nabla_a (\nabla_b \nabla_c \omega_d - \nabla_c \nabla_b \omega_d) = \nabla_a (R_{bcd}{}^e \omega_e) = \omega_e \nabla_a R_{bcd}{}^e + R_{bcd}{}^e \nabla_a \omega_e \quad (3.2.22)$$

を得る．式 (3.2.21) と (3.2.22) で, a, b, c について反対称化すると, 左辺は等しくなる．右辺が等しいことから

$$R_{[abc]}{}^e \nabla_e \omega_d + R_{[ab|d]}{}^f \nabla_{[c]} \omega_f = \omega_e \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e + R_{[bc|d]}{}^e \nabla_{a]} \omega_e \quad (3.2.23)$$

を得る．ここで, 添字の垂直線は d については反対称化しないことを示している．左辺の第1項は式 (3.2.14) で消え, 両辺の第2項は互いに打ち消しあう．したがって, 全ての ω_e にたいして

$$\omega_e \nabla_{[a} R_{bc]d}{}^e = 0 \quad (3.2.24)$$

となる．これで性質 (4) (Bianchi 恒等式) が示された．

Riemann テンソルを「trace 項」と「trace 0」の項に分離すると便利である．反対称の性質 (1) と (3) より, Riemann テンソルの最初の2つの添字または最後の2つの添字についてトレースをとると0になる．しかし, 2番目と4番目の添字についてトレース (1番目と3番目でも同じ) をとると *Ricci* テンソル R_{ac} が定義される

$$R_{ac} = R_{abc}{}^b \quad (3.2.25)$$

式 (3.2.20) から R_{ac} は以下の対称性を満たす

$$R_{ac} = R_{ca} \quad (3.2.26)$$

スカラー曲率 R は Ricci テンソルのトレースとして定義される

$$R = R_a{}^a \quad (3.2.27)$$

「trace 0 な部分」は *Weyl* テンソル C_{abcd} と呼ばれ, $n \geq 3$ 次元の多様体上で式

$$R_{abcd} = C_{abcd} + \frac{2}{n-2} (g_{a[c} R_{d]b} - g_{b[c} R_{d]a}) - \frac{2}{(n-1)(n-2)} R g_{a[c} g_{d]b} \quad (3.2.28)$$

で定義される．*Weyl* テンソルは Riemann テンソルの対称性の性質 (1),(2),(3) を満たしている他, 全ての添字に対して trace 0 である．それは計量の共形変換の元で非常に単純に振る舞うので, 共形テンソル (*conformal tensor*) とも呼ばれる．

Bianchi 恒等式 (3.2.16) の縮約から R_{ab} により満たされる重要な方程式が導かれる．まず

$$\nabla_a R_{bcd}{}^a + \nabla_b R_{cd} - \nabla_c R_{bd} = 0 \quad (3.2.29)$$

を見出す．次に計量で添字 d を上げ， b と d について縮約をとると

$$\nabla_a R_c{}^a + \nabla_b R_c{}^b - \nabla_c R = 0 \quad (3.2.30)$$

を得る．これはまた

$$\nabla^a G_{ab} = 0 \quad (3.2.31)$$

ここで

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} \quad (3.2.32)$$

である． G_{ab} は *Einstein* テンソルと呼ばれる．これは Einstein 方程式に現れ，Bianchi 恒等式を2度縮約して得られる (3.2.31) 式は，Einstein 方程式の整合性を保証するのに大事な役割を果たす．

3.3 測地線 (Geodesics)

直観的には，測地線は「もっとも短い曲線」であり，曲がった幾何上で引くことのできる「可能な限りまっすぐな線」である．ある微分演算子 ∇_a が与えられたとき，測地線 (*geodesic*) を，その接ベクトルが曲線自身に沿って平行移動できるような曲線と定義しよう．つまり (測地線の) 接ベクトル T^a は次の式を満たすものである．

$$T^a \nabla_a T^b = 0 \quad (3.3.1)$$

実際には，「可能な限りまっすぐな線」という直観的な要請を満足させるには曲線に対する接ベクトルが平行移動させたときに同じ方向を向くことで充分で，同じ長さを保つことは必要ではない．これから，より弱い条件として

$$T^a \nabla_a T^b = \alpha T^b \quad (3.3.2)$$

ここで α は曲線上の任意の関数である．しかし，式 (3.3.2) を満たす曲線が与えられれば，(3.3.1) を満たすようにパラメーターを設定し直すことができる．ということで，(3.3.1) を満たすような曲線のみを扱うことで

も，一般性を失うことはない．方程式 (3.3.1) を導くようなパラメーターのとりかたは *affine parametrization* と呼ばれる．

座標基底でこの方程式の成分を書き下すことで，測地線方程式の性質についての洞察をさらに深めよう．座標系 ψ では，測地線は R^n の中のある曲線 $x^\mu(t)$ に写像される．式 (3.1.19) から， T^a のこの座標基底での成分 T^μ は

$$\frac{dT^\mu}{dt} + \sum_{\sigma,\nu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} T^\sigma T^\nu = 0 \quad (3.3.3)$$

をみたす．しかし，(2.2.12) から，成分 T^μ は単純に

$$T^\mu = \frac{dx^\mu}{dt} \quad (3.3.4)$$

となる．したがって，座標基底では，測地線方程式は

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2} + \sum_{\sigma,\nu} \Gamma^\mu_{\sigma\nu} \frac{dx^\sigma}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = 0 \quad (3.3.5)$$

となる．

方程式 (3.3.5) は n 個の関数 $x^\mu(t)$ にたいする n 個の 2 階常微分方程式系である．常微分方程式の理論から，任意の初期値 x^μ と dx^μ/dt にたいして (3.3.5) にはユニークな解が常に存在する．これが意味するのは，多様体上の点 $p \in M$ と接ベクトル $T^a \in V_p(M)$ にたいして，点 p を通り T^a に接する測地線が常にただ一つ存在するということである．

実際，測地線の存在と唯一であることから，いくつかの計算目的に非常に便利な座標系を構築することが許される．指数写像 (*exponential map*) と呼ばれる以下のような写像を定義する．それは接空間 $V_p(M)$ から M への写像で， $T^a \in V_p(M)$ を，(M 上の点 p を通り T^a に接する測地線に沿った) 点 p から単位 affine パラメーターだけ離れた M 上の点に写す写像である．大きな T^a に対しては，affine パラメーターが $t = 1$ になる前に特異性にぶつかるかもしれない．または複数の測地線が交わって，指数写像が 1 対 1 でなくなるかもしれない．しかし常に，指数関数写像が定義され 1 対 1 であるような (十分小さな) $V_p(M)$ の原点からの近傍が存在することを示すことができる． $V_p(M)$ は n 次元のベクトル空間であるので，それを R^n と同一視ができ，指数関数写像を座標系を定義するのに用いることができる．これを点 p での *Riemann* 正規座標系という．これらの座標系は， p を通る全ての測地線が R^n の原点を通る直線に写像される性質を持つ．式 (3.3.5) から，この座標系では Christoffel 記

号 $\Gamma^\mu_{\sigma\nu}$ が p で消える．この事実により，与えられた点で計算する際に，Riemann 正規座標系が大変使い易くなる．

微分演算子 ∇_a が計量 g_{ab} から由来する場合には，*Gaussian* 正規座標系または同期座標系と呼ばれる第2の種類の座標系が，超曲面 S (n 次元多様体 M に埋め込まれた $(n-1)$ 次元部分多様体) が与えられた状況での計算に便利である．各点 $p \in S$ で，多様体 S の接空間 $V_p(S)$ は自然に M の接空間 $V_p(M)$ の $(n-1)$ 次元部分空間と見なすことができる．したがって， $V_p(S)$ 内の全てのベクトルに (計量 g_{ab} で) 直交するベクトル $n^a \in V_p(M)$ が存在する．このベクトル n^a は S に対する法線と呼ばれる．Riemann 計量の場合， n^a は $V_p(S)$ の中にはあり得ない；不定計量の場合， n^a はヌルベクトル $g_{ab}n^an^b = 0$ ということもあり得るので，その場合 n^a は $V_p(S)$ の中にあり， S は点 p でのヌル超曲面と呼ばれる． S が至る所ヌルでなければ， $g_{ab}n^an^b = \pm 1$ という条件で n^a を規格化できる．*Gaussian* 正規座標系は，任意のヌルでない超曲面に対して次のように定義できる．各点 $p \in S$ に対して，点 p を通り n^a に接する測地線を構築する． S (の1部分の) 上の任意の座標 (x^1, \dots, x^{n-1}) を選び， S (の当該部分) の近傍内の各点を，測地線に沿ったパラメーター t と $p \in S$ の座標 x^1, \dots, x^{n-1} でラベル付けする． S から出発する測地線は最後には交わるか特異性にぶつかるかもしれないが，各点 $p \in S$ の (十分小さい) 近傍では，写像 $q \rightarrow (x^1, \dots, x^{n-1}, t)$ は我々が構築しようと望んでいた局所座標を定義する．

Gaussian 正規座標系は，測地線が (t 一定で定義される) 超曲面 S_t に垂直に留まるという重要な性質を満たしている．これは，構成から，超曲面 $S_0 = S$ については正しい．これが全ての S_t について正しいことを示すためには，測地線の接ベクトル場 n^a が全ての (S_t への接空間を生成する) 座標基底場 X_1^a, \dots, X_{n-1}^a と垂直に留まることを示せば十分である．これらの場のどれか一つを X^a で表すと

$$\begin{aligned} n^b \nabla_b (n_a X^a) &= n_a n^b \nabla_b X^a \\ &= n_a X^b \nabla_b n^a \\ &= \frac{1}{2} X^b \nabla_b (n^a n_a) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

を得る．ここで最初の等式は測地線方程式から由来し，2番目は n^a と X^b が (M の座標基底の要素なので) 交換するという事実から，3番目はライプニッツ則から直接，最後は S での規格化条件 $n^a n_a = \pm 1$ が平行移動で

保たれるので $n^a n_a$ が M 上で定数という事実から来る. S 上で $n_a X^a = 0$ なので, 式 (3.3.6) は, この条件が S から離れても保たれることを示している.

計量に由来する微分演算子の測地線のさらなる性質は, 与えられた点を結ぶ曲線の (計量で測る) 長さの極値であるということである. Riemann 計量 g_{ab} をもつ多様体 M 上の滑らかな曲線 C に対して, C の長さ l は

$$l = \int (g_{ab} T^a T^b)^{1/2} dt \quad (3.3.7)$$

で定義される. ここで T^a は C に接しており, t は曲線のパラメーターである. Lorentz 符号数 $(- + \cdots +)$ の計量に対しては, 曲線は接ベクトルのノルムが至る所で負のとき $g_{ab} T^a T^b < 0$ 時間的; $g_{ab} T^a T^b = 0$ のときヌル; $g_{ab} T^a T^b > 0$ のとき空間的と呼ばれる. 空間的な曲線については長さは (3.3.7) で定義; ヌル曲線の長さは 0; 時間的曲線については, 平方根の中の符号を逆にし, 長さの代わりに固有時間 τ という名称を用いる.

$$\tau = \int (-g_{ab} T^a T^b)^{1/2} dt \quad (3.3.8)$$

時間的から空間的に変わる曲線の長さは定義しない. 注意すべきことだが, 測地線の接ベクトルは平行移動され, そのノルムは定数なので, Lorentz 多様体の測地線は時間的から空間的またはヌルに変わることが出来ない. もうひとつ注意すべきことだが, 曲線の長さ (または固有時間) は, 曲線のパラメーターのとりかたに依存しない. 新しいパラメーターを $s = s(t)$ とすると, 新たな接ベクトルは $S^a = (dt/ds) T^a$ となり, 新たな長さは

$$l' = \int (g_{ab} S^a S^b)^{1/2} ds = \int (g_{ab} T^a T^b)^{1/2} \frac{dt}{ds} ds = l \quad (3.3.9)$$

となる.

曲線の端点間の長さを極値とする条件を導こう. つまり, 端点を固定しての任意の滑らかな変形で, 長さが 1 次のオーダーでは変化しない曲線を見出したい. 局所座標を選び R^n で考察して, 小さな変形による曲線の長さの変化の計算を遂行しよう. 明確にするため空間的な曲線を考える. 座標基底で (3.3.7) を書くと,

$$l = \int_a^b \left[\sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right]^{1/2} dt \quad (3.3.10)$$

を得る．ここで $C(a) = p$ と $C(b) = q$ は曲線の端点である． l に対して極値をとる問題は，数学的には Lagrangian 力学の作用の極値問題と等価である． l の変分は

$$\delta l = \int_a^b \left[\sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \right]^{-1/2} \sum_{\alpha, \beta} \left\{ g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{d(\delta x^\beta)}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \delta x^\sigma \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \right\} dt \quad (3.3.11)$$

である．(長さはパラメーターの取り方によらないので) 一般性を失うことなく，元の曲線は次のようにパラメーターをとることができるものとする

$$g_{ab} T^a T^b = 1 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}$$

このようなパラメーターをとると，極値条件は

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \sum_{\alpha, \beta} \left\{ g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{d(\delta x^\beta)}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\beta}{dt} \delta x^\sigma \right\} dt \\ &= \int_a^b \sum_{\alpha, \beta} \left\{ -\frac{d}{dt} \left(g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\lambda} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} \right\} \delta x^\beta dt \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

である(端点で δx^β が消えるので，部分積分で境界項は出ない)．任意の δx^β に対して方程式 (3.3.12) が成り立つのは

$$-\sum_{\alpha} g_{\alpha\beta} \frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} - \sum_{\alpha, \lambda} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\lambda}{dt} \frac{dx^\alpha}{dt} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \lambda} \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\beta} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dx^\lambda}{dt} = 0 \quad (3.3.13)$$

の時だけ，かつその時に限る． $\Gamma^\sigma_{\alpha\lambda}$ に対する式 (3.1.30) を使うと，(3.3.13) は測地線の方程式 (3.3.5) に他ならないことがわかる．というわけで，端点間の長さの極値をとる曲線は，測地線である場合に限り，その逆もなりたつ．

同様な導出法で，2点間の固有時間の極値をとる曲線は，時間的な測地線に他ならないことが示される．これらの導出法はまた，測地線方程式は (affine パラメーターをとったとき) Lagrangian

$$L = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} \quad (3.3.14)$$

の変分から得られることを示している．多くの場合，与えられた座標基底でクリストッフェル記号 $\Gamma^\mu_{\sigma\nu}$ を計算する最も効率的な方法は Lagrangian

(3.3.14) から出発し, 対応する Euler-Lagrange 方程式を書き下し, 式 (3.3.5) と比較して $\Gamma^\mu_{\sigma\nu}$ を読みとることである.

Riemann 計量を持つ多様体上では, 2 点を結ぶ任意の長さの曲線を見出すことができる. しかし, 長さには下限があり, 2 点を結ぶ最も短い曲線は必然的に距離の極値をとり測地線である. それで, 2 点の最短経路は常に「可能な限り真っ直ぐな経路」である. しかし, 2 点を結ぶ測地線はかならずしも 2 点の最短経路ではない. Lorentz 計量を持つ多様体に対しては, 時間的な曲線で結ばれる 2 点をとると, 点を結ぶ任意の小さな固有時間を持つ時間的な曲線が見出される. いくつかの時空間では, 2 つの与えられた点を結ぶ時間的な曲線の固有時間は必ずしも上限があるわけでない; しかし固有時間が最大となる曲線が存在すれば, それは時間的な測地線でなければならない.

我々の最終的な任務は, 測地線の偏差方程式を導くことである. 偏差方程式は, 複数の測地線が加速して互いに集まる又は離れる傾向と, 多様体の曲率を関係づける. これは曲率のもう一つの特徴付けであり, Einstein 方程式の動機付けに重要な役割を果たす (4 章 3 節).

$\gamma_s(t)$ で測地線の滑らかな 1 パラメーター族を表すものとする. つまり, 各 $s \in \mathcal{R}$ にたいして, 曲線 γ_s は (affine パラメーター t の) 測地線であり, 写像 $(t, s) \rightarrow \gamma_s(t)$ は滑らかで, 1 対 1 で, 逆も滑らかである. (複数の) 曲線 $\gamma_s(t)$ により張られる 2 次元部分多様体を Σ と記述しよう. Σ の座標として, s と t を選ぶ. ベクトル場 $T^a = (\partial/\partial t)^a$ は測地線の族に接しており, したがって

$$T^a \nabla_a T^b = 0 \quad (3.3.15)$$

を満足する. ベクトル場 $X^a = (\partial/\partial s)^a$ は, 無限小に近い測地線への変位を表しており, 偏差ベクトル (*deviation vector*) と呼ばれる. X^a には「ゲージ自由度」がある. つまり, 測地線 $\gamma_s(t)$ の affine パラメーターの変更 $t \rightarrow t' = b(s)t + c(s)$ の下で, X^a に T^a の倍数が加わるという意味である.

$$\frac{d\gamma_s(t')}{ds} = \frac{\partial\gamma_s(t')}{\partial s} + \frac{\partial\gamma_s(t)}{\partial t} \frac{dt'}{ds} ??$$

注目に値することだが (ある計量 g_{ab} に伴う微分演算子から起因する測地線の場合) X^a は常に T^a と直交するように選ぶことができる. つまり, s に依存する因子で t をスケールし直すことで, $g_{ab}T^aT^b$ (各々の測地線に沿って定数; t に依存しない) は s でも変化しないように保証することができる. X^a と T^a は座標ベクトル場であるので, それらは交換

する：

$$T^b \nabla_b X^a = X^b \nabla_b T^a \quad (3.3.16)$$

それで、式 (3.3.6) と同様な計算で、 $X^a T_a$ は各々の測地線上で定数ということがわかる。さらに $\gamma_s(t)$ を (s に依存する) 定数を t に付け加えてパラメーターを取り直すことで、曲線 $C(s)$ が $t=0$ で全ての測地線と直交する点 (の集合) から構成されるように保証できる。よって、 $\gamma_s(t)$ のこの affine パラメーターのとりかたから、 $t=0$ で $X_a T^a = 0$ を、したがって至る所で $X_a T^a = 0$ を得る。

量 $v^a = T^b \nabla_b X^a$ は、ある測地線に沿っての、無限小に近い別の測地線に対する変位の変化率を与える。したがって v^a は無限小に近い測地線の相対速度と解釈できるだろう。同様に

$$a^a = T^c \nabla_c v^a = T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a) \quad (3.3.17)$$

は無限小に近い測地線の相対加速度と解釈できるだろう。 a^a を Riemann テンソルと関連付ける方程式を導こう。

$$\begin{aligned} a^a &= T^c \nabla_c (T^b \nabla_b X^a) \\ &= T^c \nabla_c (X^b \nabla_b T^a) \\ &= (T^c \nabla_c X^b) (\nabla_b T^a) + X^b T^c \nabla_c \nabla_b T^a \\ &= (X^c \nabla_c T^b) (\nabla_b T^a) + X^b T^c \nabla_b \nabla_c T^a - R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \\ &= X^c \nabla_c (T^b \nabla_b T^a) - R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \\ &= -R_{cbd}{}^a X^b T^c T^d \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

式 (3.3.18) は測地線偏差方程式 (*geodesic deviation equation*) として知られる。全ての測地線の族に対して $a^a = 0$ となるのは、 $R_{abc}{}^d = 0$ の場合に限る。測地線が、加速して互いに近づくか遠ざかる (当初は平行だった測地線 - つまり最初は $v^a = T^b \nabla_b X^a = 0$ だった測地線 - が平行ではありつづけられなくなる) のは、 $R_{abc}{}^d \neq 0$ のときに限る。

3.4 曲率の計算方法

3.4.1 座標成分法

座標成分法で曲率を計算するため、座標系を選ぶことから初める。3章1節で議論したように、微分演算子 ∇_a を、この座標系の通常微分 ∂_a と

Christoffel 記号 Γ^c_{ab} で表そう．双対ベクトル場 ω_a にたいして

$$\nabla_b \omega_c = \partial_b \omega_c - \Gamma^d_{bc} \omega_d \quad (3.4.1)$$

を得る．したがって

$$\begin{aligned} \nabla_a \nabla_b \omega_c &= \partial_a (\partial_b \omega_c - \Gamma^d_{bc} \omega_d) \\ &\quad - \Gamma^e_{ab} (\partial_e \omega_c - \Gamma^d_{ec} \omega_d) \\ &\quad - \Gamma^e_{ac} (\partial_b \omega_e - \Gamma^d_{be} \omega_d) \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

この様にして (3.2.3) は

$$R_{abc}{}^d \omega_d = [-2\partial_{[a} \Gamma^d_{b]c} + 2\Gamma^e_{c[a} \Gamma^d_{b]e}] \omega_d \quad (3.4.3)$$

と表すことができる．ここで通常微分の交換性と， Γ^c_{ab} の対称性 (3.1.9) を使った．式 (3.4.3) は全ての ω_d に対して成り立つので，両辺から ω_d を消去して $R_{abc}{}^d$ にたいする望む結果を得ることができる．われわれの局所座標に伴う座標基底で、この式のテンソル成分をとると，方程式

$$R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma^\sigma_{\mu\rho} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Gamma^\sigma_{\nu\rho} + \sum_{\alpha} (\Gamma^\alpha_{\mu\rho} \Gamma^\sigma_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho} \Gamma^\sigma_{\alpha\mu}) \quad (3.4.4)$$

を得る．ここで，われわれは通常微分の定義は座標に関する成分の偏微分であることを用いた．

したがって， g_{ab} から $R_{abc}{}^d$ を計算するには，最初に座標基底での計量の成分 $g_{\mu\nu}$ を求める．それから，式 (3.1.30) から $\Gamma^\sigma_{\mu\nu}$ を計算する．最後に (3.4.4) を通して成分 $R_{\mu\nu\rho}{}^\sigma$ を計算する．Ricci テンソルの成分は (3.4.4) を縮約することで得られる．

$$\begin{aligned} R_{\mu\rho} &= \sum_{\nu} R_{\mu\nu\rho}{}^\nu \\ &= \sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Gamma^\nu_{\mu\rho} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sum_{\nu} \Gamma^\nu_{\nu\rho} \right) + \sum_{\alpha,\nu} (\Gamma^\alpha_{\mu\rho} \Gamma^\nu_{\alpha\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\rho} \Gamma^\nu_{\alpha\mu}) \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

この機会に，座標基底での計算に便利ないくつかの事実を指摘しよう．計量の座標基底成分 $g_{\mu\nu}$ を，行列で書くことができる．逆計量 g^{ab} の成分 $g^{\mu\nu}$ は，行列 $(g_{\mu\nu})$ の逆行列となる． $(g_{\mu\nu})$ の行列式を g と定義しよう．

$$g = \det(g_{\mu\nu}) \quad (3.4.6)$$

Christoffel 記号を縮約した Γ^a_{ab} に対する，簡単な公式が導かれる．式 (3.1.30) から

$$\Gamma^a_{a\mu} = \sum_{\nu} \Gamma^{\nu}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu,\alpha} g^{\nu\alpha} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} \quad (3.4.7)$$

を得る．しかし，逆行列に関する公式を用いると

$$\sum_{\nu,\alpha} g^{\nu\alpha} \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^{\mu}} \quad (3.4.8)$$

が示される．したがって，

$$\Gamma^a_{a\mu} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \ln \sqrt{|g|} \quad (3.4.9)$$

を得る．

実際，(3.4.9) 式を使うと

$$\begin{aligned} \nabla_a T^a &= \partial_a T^a + \Gamma^a_{ab} T^b \\ &= \sum_{\mu} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{|g|} T^{\mu}) \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

を得る．

3.4.2 正規直交基底 (Tetrad) 法

座標成分法は， ∇_a と $R_{abc}{}^d$ を計算する素直な手続きを提供する利点はあるが，テンソルの計算で多くの目的に対して正規直交基底を用いるのが有利である．座標基底 $\{\partial/\partial x^{\mu}\}$ は，デカルト座標の平坦な時空間の場合を除いて，正規直交ではない．そこで「非ホロノミック (nonholonomic)」つまり座標で表されない正規直交ななめらかなベクトル場 $(e_{\mu})^a$ で

$$(e_{\mu})^a (e_{\nu})_a = \eta_{\mu\nu} \quad (3.4.11)$$

を満たすものを導入したい．ここで $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, \dots, -1, 1, \dots, 1)$ である．4次元では， $\{(e_{\mu})^a\}$ は *tetrad* と呼ばれる．式 (3.4.11) は便利な関係

$$\sum_{\mu,\nu} \eta^{\mu\nu} (e_{\mu})^a (e_{\nu})_b = \delta^a_b \quad (3.4.12)$$

を意味する．

$$\omega_{a\mu\nu} = (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b \quad (3.4.13)$$

$$\omega_{\lambda\mu\nu} = (e_\lambda)^a (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b \quad (3.4.14)$$

$$\begin{aligned} \omega_{a\mu\nu} &= (e_\mu)^b \nabla_a (e_\nu)_b \\ &= -(e_\nu)^b \nabla_a (e_\mu)_b \\ &= -\omega_{a\nu\mu} \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

$$\omega_{a\mu\nu} = -\omega_{a\nu\mu} \quad (3.4.16)$$

第4章 アインシュタイン方程式

4.1 相対論以前の空間の幾何学

相対論以前の物理では、空間は R^3 の多様体の構造を持つと想定されている。さらに、空間の点と R^3 の要素 (x^1, x^2, x^3) との関連付けは、定規で「固い直線の格子」を構築することで自然に達成できると想定されている。この様にして得られた空間座標はデカルト座標 (*Cartesian coordinates*) と呼ばれる。多くの異なるデカルト座標系が可能である—特にそれらは R^3 の回転と並進の6パラメーター群の要素に1対1に対応可能である。空間の中のある点のデカルト座標 (x^1, x^2, x^3) は、それら自身としては、本質的な意味は無い。しかし、2つの点 x と \bar{x} の間の距離 D は、デカルト座標では

$$D^2 = (x^1 - \bar{x}^1)^2 + (x^2 - \bar{x}^2)^2 + (x^3 - \bar{x}^3)^2 \quad (4.1.1)$$

と定義されるが、デカルト座標系の選択には独立で、空間の本質的な性質を記述するものと見なせる。

2点間の距離に対するこの公式は、次のように空間の計量 h_{ab} を生み出す。式 (4.1.1) によると、2つの「近い」点の距離は

$$(\delta D)^2 = (\delta x^1)^2 + (\delta x^2)^2 + (\delta x^3)^2 \quad (4.1.2)$$

である。これは空間の計量が ((2.3.10) の表記法で)

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (4.1.3)$$

で与えられることを示唆している。または、デカルト座標基底の添字記法では

$$h_{ab} = \sum_{\mu, \nu} h_{\mu\nu} (dx^\mu)_a (dx^\nu)_b \quad (4.1.4)$$

$(h_{\mu\nu} = \text{diag}(1, 1, 1))$ となる。この h_{ab} の定義は、デカルト座標系の選択とは独立である。つまり、異なったデカルト座標系を選んだとしても、同じテンソル場 h_{ab} と言う結果になるだろう。

式 (4.1.4) によって決められる幾何について調べてみよう．デカルト座標基底での計量の成分は定数であるので，この座標系の通常微分演算子は

$$\partial_a h_{bc} = 0 \quad (4.1.5)$$

を満たす．したがって，この通常微分は h_{ab} に伴う微分演算子であり，この座標系では Γ^a_{bc} は消える．通常微分は全てのテンソルと交換するので，式 (3.2.3) から曲率は消え， h_{ab} は平坦である．式 (3.3.5) から，空間の測地線は (デカルト座標で表したとき) 「直線」に他ならない．したがって，どのような2点をとってもそれらを結ぶ測地線がユニークに存在し，この測地線の距離 (3.3.7) は式 (4.1.1) で与えられる．したがって，式 (4.1.4) の計量は，(計量の定義を動機付けた) 距離の公式を再現する．

このようにして，相対論以前の物理での空間についての我々の仮定は，空間は平坦な Riemann 計量を持つ R^3 の多様体であるという言明に導く．逆に，空間が平坦な Riemann 計量を持つ R^3 ならば，最初の過程をすべて導くことができる．平坦な計量の測地線は，当初平行であった測地線は曲率が0なので平行でありつづけることを使うと，デカルト座標系を構築するのに使うことができる．式 (4.1.1) の距離の公式は成り立つので，「固い直線の格子」を構築するためのデカルト座標上の定規は無くてもすむ．この節で言ってきたこと全ては，空間は平坦な Riemann 計量が定義されている多様体 R^3 であるという言明に要約される．

今度は，空間の中の物理量について考える．物理の実験全ては数を測定するので，物理的に興味のある全ての量は結局は数に帰着するはずである．しかし (2章3節の最初に触れた磁場や応力テンソルなどの) 多くの興味ある量は，数を生み出すにはさらにベクトル基底の特定を要求する．非常に一般的なクラスの量は，ベクトルや双対ベクトルの数への写像である．そのような解析的な写像は，多重線形な写像の和として Taylor 展開可能であるので，テンソル場 (ベクトルや双対ベクトルの数への多重線形写像) は極めて広いクラスの量を包含していることがわかる．実際，テンソル場の数学的な概念の一般性は非常に大きいので，実質的に物理で考慮する全ての量がテンソル場と見なせる．それらの量を支配する物理法則はテンソル方程式 (空間上に定義されたテンソル場の間の等式) として表すことができる．

4.2 特殊相対論

特殊相対論では，時空間は R^4 の多様体の構造を持つと想定されている．時空間の運動で「慣性」または「非加速」運動と呼ばれる，好都合な運動の族があるものと想定されている．さらに，慣性系の観測者は，定規で固い格子系を設定することや，格子点に置いた時計を同期させること，および時空間の各事象に格子座標 x_1, x_2, x_3 と時刻 t でラベル出来るものと想定されている．この時空間の R^4 への写像は大局的な慣性座標系 (*global inertial coordinate system*) と呼ばれる．多くの異なる大局的な慣性座標系が可能である— そうしてそれらは 10 パラメーターの Poincaré 群の要素に 1 対 1 に対応している．したがって，ある事象にたいするラベル $t = x^0, x^1, x^2, x^3$ には本質的な意味はない．しかし，2 つの事象 x と \bar{x} の時空間の間隔 I ($c = 1$ の単位で)

$$I = -(x^0 - \bar{x}^0)^2 + (x^1 - \bar{x}^1)^2 + (x^2 - \bar{x}^2)^2 + (x^3 - \bar{x}^3)^2 \quad (4.2.1)$$

は全ての大局的な慣性座標系で同じ値をもち，時空間の本質的な性質を表すと見なせる．

前節の議論と同様に，式 (4.2.1) は，時空間の計量 (*metric of spacetime*) η_{ab} が

$$\eta_{ab} = \sum_{\mu, \nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} (dx^\mu)_a (dx^\nu)_b \quad (4.2.2)$$

と定義されることを示唆している．ここで $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ で， $\{x_\mu\}$ は大局的な慣性座標系である．やはり，この様にして得られたテンソル場 $\eta_{\mu\nu}$ は大局的な慣性座標系の選択とは独立である．また，大局的な慣性座標系の通常微分演算子 ∂_a は

$$\partial_a \eta_{bc} = 0 \quad (4.2.3)$$

を満たし，よって時空間の計量に伴う微分演算子である．通常微分演算子は交換するので η_{ab} の曲率は 0 である． η_{ab} の測地線は，大局的な慣性座標で表したとき，直線である．とくに， η_{ab} の時間的な測地線は，時空間の中の慣性運動している観測者の世界線そのものである．

よって，特殊相対性理論は，時空間は，(*Lorentz* 符号数の平坦な計量の) R^4 多様体であると主張している．

特殊相対論で物理的に興味のある量はテンソル場で表現されるが，相対論以前の物理で空間テンソルと見なされていた量は特殊相対論では時

空間テンソルの一部をなすと認識される．特殊相対論の文脈では，一般共変性原理の主張は，時空間の計量 η_{ab} は物理法則に現れる時空間構造に係わるただ一つの量である，ということである．この原理は，特殊相対論の物理法則にあてはまると信じられているが，重要な変更を一つ伴う．パリティの破れと時間反転対称性の破れを示す実験から，さらに2つの時空間の特徴が物理法則に現れることができる：時空間の時間の向きと空間の向きである．「時間の向き」で我々が意味するのは，光円錐の半分は未来の方向を表し半分は過去の方角を表すものような時空間全体での連続な選択である．「空間の向き」で我々が意味するのは，時空間全体での，それぞれの点での「右手系」対「左手系」の空間的ベクトルの正規直交な三つ組の連続な選択である．同様に，特殊相対論での物理法則は，本義 (*proper*) Poincaré 変換 (つまり並進，回転，時空間のブースト，しかし時間反転とパリティ変換は除く) に対する特殊相対論の共変原理を満たすものとする．

特殊相対性理論でのいくつかの物理法則をより明確に記述しよう．既に述べたように，曲線はそれらの接ベクトルのノルム $\eta_{ab}T^aT^b$ がそれぞれ負，0，正に対応して，時間的，ヌル，空間的と分類される．特殊相対論は，物質粒子の時空間内の経路は常に時間的曲線であることを主張している (もちろん，この事実は馴染み深い言明「何物も光速以上で運動できない」の単なる言い換えである)．我々は時間的な曲線を，次のように定義される固有時間 (*proper time*) τ でパラメータ化できるだろう．

$$\tau = \int (-\eta_{ab}T^aT^b)^{1/2} dt \quad (4.2.4)$$

ここで t は曲線の任意のパラメータ (t の増加が「未来」に対応) であり， T^a はこのパラメータでの曲線への接ベクトルである．特殊相対論によると， τ は与えられた曲線に沿って時計を運んだときの経過時間に他ならない．同じ事象の対を結ぶ異なる時間的曲線は，異なる経過時間を持ち得る (双子のパラドックス) が，これは空間の2つの点を結ぶ異なる経路が異なる長さを持つと同様なことである．3章3節で述べたように，2つの事象で最大の経過時間は測地線 (慣性運動) で与えられる．

τ をパラメータとした時間的曲線への接ベクトル u^a は曲線の4元速度 (*4-velocity*) と呼ばれる． τ の定義から直ぐに，4元速度の大きさは

$$u^a u_a = -1 \quad (4.2.5)$$

と単位長さとなることがわかる．前に述べたように，外力を受けない粒

子は測地線上を移動するだろう．つまり粒子の4元速度は運動方程式

$$u^a \partial_a u^b = 0 \quad (4.2.6)$$

を満たすだろう．ここで ∂_a は η_{ab} に伴う微分演算子，つまり大域的な慣性座標系の通常微分演算子である．外力があれば，式 (4.2.6) の右辺は0ではなくなる (後の式 (4.2.26) など参照) ．

全ての物質粒子は「静止質量」 m という属性を持っており，外力がある場合の運動方程式のパラメーターとして出てくる．質量 m の粒子のエネルギー-運動量4元ベクトル p^a は

$$p^a = m u^a \quad (4.2.7)$$

で定義される (粒子の位置にいる)4元速度 v^a の観測者から測定した粒子のエネルギーは，

$$E = -p_a v^a \quad (4.2.8)$$

で定義される．したがって，特殊相対論においては，エネルギーは4元ベクトル p^a の「時間成分」と認識される．観測者に対して静止している粒子 (つまり $v^a = u^a$) にたいして，式 (4.2.8) は馴染み深い $E = mc^2$ に帰着する ($c = 1$ という単位をとっている)．時空間の計量 η_{ab} は平坦で平行移動は経路によらないので，粒子の位置にいない観測者から測った粒子のエネルギーを，粒子の位置にいて遠方の観測者に平行な4元速度をもつ観測者から測った粒子のエネルギーと定義できる．

特殊相対論では連続的な物質分布はストレスエネルギー-運動量 (*stress-energy-momentum*) テンソルと呼ばれる対称テンソル T_{ab} で記述される．4元速度 v^a の観測者にとっては， $T_{ab} v^a v^b$ はエネルギー密度，つまり単位体積当たりの質量エネルギー，と解釈される．通常の物質では，この量は非負である．

$$T_{ab} v^a v^b \geq 0 \quad (4.2.9)$$

もし x^a が v^a と直交していれば，成分 $-T_{ab} v^a x^b$ は物質の x^a 方向の運動量密度と解釈される．さらに y^a も v^a と直交していれば，成分 $T_{ab} x^a y^b$ は (2章3節のはじめに触れた) 物質の応力テンソルの $x^a - y^a$ 成分を表す．したがって，相対論以前の物理の応力テンソルはエネルギーと運動量密度とむすびついて，特殊相対論のストレスエネルギー-運動量テンソルを形成する．標準的な慣習にしたがって，しばしば「ストレスエネルギー-運動量テンソル」を「ストレスエネルギー-運動量テンソル」または「ストレステンソル」と省略しよう．

理想流体は，物質が連続的に分布していて，ストレスエネルギーテンソルが

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(\eta_{ab} + u_a u_b) \quad (4.2.10)$$

の形のものとして定義される．ここで u^a は流体の4元速度を表す時間的な単位ベクトル場である．上述の T_{ab} の解釈によると，関数 ρ は流体静止系から測定した流体の質量エネルギー密度， P は圧力である．熱輸送項が無く，粘性に対応する応力項が無いので，「理想」流体と呼ばれる．

外力が無い時の理想流体の運動方程式は

$$\partial^a T_{ab} = 0 \quad (4.2.11)$$

である．(4.2.11) を ρ, P, u^a で書き下し， u^b に平行なものと垂直なものに射影すると

$$u^a \partial_a \rho + (\rho + P) \partial^a u_a = 0 \quad (4.2.12)$$

$$(P + \rho) u^a \partial_a u_b + (\eta_{ab} + u_a u_b) \partial^a P = 0 \quad (4.2.13)$$

を得る．非相対論的極限 $P \ll \rho$ ， $u^\mu = (1, \vec{v})$ ， $v dP/dt \ll |\vec{\nabla} P|$ では，これらの式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.2.14)$$

$$\rho \left\{ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right\} = -\vec{\nabla} P \quad (4.2.15)$$

となる．したがって，式(4.2.11)は，質量の保存(4.2.14)とEuler方程式(4.2.15)に帰着する．

式(4.2.11)には重要な物理的解釈がある．平行な4元速度 v^a で慣性運動する観測者の1群(つまり $\partial_b v^a = 0$)を考える．上記の T_{ab} の解釈によると，量

$$J_a = -T_{ab} v^b \quad (4.2.16)$$

は，これらの観測者が測定した，流体の質量エネルギーカレント密度の4元ベクトルを表している．式(4.2.11)は

$$\partial^a J_a = 0 \quad (4.2.17)$$

を意味している．ガウスの法則を用いると(4.2.17)から，任意の4次元時空体積 V の3次元境界 S について

$$\int_S J_a n^a dS = 0 \quad (4.2.18)$$

が成り立つ．ここで n^a は単位法線ベクトルである．これを図 4.1 の体積に当てはめると，この体積の中の流体のエネルギー変化は，体積に流入するエネルギー流束の時間積分に等しいことがわかる．つまり，式 (4.2.18) はエネルギー保存を表す．逆に，任意の慣性系の観測者から測定したエネルギー保存は，式 (4.2.11) を要請する．より一般的に，エネルギー保存が意味するのは，式 (4.2.11) が理想流体のみならず全ての連続な物質分布に対して成り立たなくてはならないことである．

特殊相対論での場の記述を例示するため，スカラー場と電磁場の 2 つの例をとろう．自然界には古典的なスカラー場は存在しないが，Klein-Gordon 方程式

$$\partial^a \partial_a \phi - m^2 \phi = 0 \quad (4.2.19)$$

を満たす場 ϕ を考察するのは，多くの目的に教育的である．このスカラー場に対するストレスエネルギーテンソルは

$$T_{ab} = \partial_a \phi \partial_b \phi - \frac{1}{2} \eta_{ab} (\partial^c \phi \partial_c \phi + m^2 \phi^2) \quad (4.2.20)$$

である．ここでもまた T_{ab} は式 (4.2.9) のエネルギー条件を満たし，場の方程式 (4.2.19) のお陰で保存式 (4.2.11) を満たす．

相対論以前の物理では，電場 \vec{E} と磁場 \vec{B} はそれぞれ空間ベクトルである．特殊相対論ではそれらの場は結びついて，単一の時空間のテンソル場 F_{ab} になる．この場は添字について反対称 $F_{ab} = -F_{ba}$ である．従って F_{ab} は 6 つの独立な成分をもつ．4 元速度 v^a で移動している観測者からは，量

$$E_a = F_{ab} v^b \quad (4.2.21)$$

はその観測者から測定した電場と解釈される．一方

$$B_a = -\frac{1}{2} \epsilon_{ab}{}^{cd} F_{cd} v^b \quad (4.2.22)$$

は磁場と解釈される．ここで ϵ_{abcd} は完全反対称テンソルで正の向きを持ちノルムが $\epsilon_{abcd} \epsilon^{abcd} = -24$ となるものである．したがって右手系の正規直交基底では $\epsilon_{0123} = 1$ となる．

F_{ab} を使うと，Maxwell 方程式は単純で美しい形を取る．

$$\partial^a F_{ab} = -4\pi j_b \quad (4.2.23)$$

$$\partial_{[a} F_{bc]} = 0 \quad (4.2.24)$$

ここで j^a は電荷の4元電流密度ベクトルである． F_{ab} の反対称性から

$$0 = \partial^b \partial^a F_{ab} = -4\pi \partial^b j_b \quad (4.2.25)$$

となることに注意しよう．したがって，Maxwell 方程式は $\partial^b j_b = 0$ を意味し，これは前に（理想流体で） J_a に対し行ったのと同様な議論で，電荷が保存することを述べている．電荷 q の粒子が電磁場 F_{ab} の中を移動するときの運動方程式は

$$u^a \partial_a u^b = \frac{q}{m} F^b{}_c u^c \quad (4.2.26)$$

である．これは，通常の Lorentz 力の法則を F_{ab} で定式化しなおしたものである．

電磁場のストレスエネルギーテンソルは

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left\{ F_{ac} F_b{}^c - \frac{1}{4} \eta_{ab} F_{de} F^{de} \right\} \quad (4.2.27)$$

である．ここでもまた， T_{ab} はエネルギー条件 (4.2.9) 式を満たす．もし $j^a = 0$ ならば，Maxwell 方程式から $\partial^a T_{ab} = 0$ を得る．もし $j^a \neq 0$ ならば，電磁場のストレスエネルギーテンソル T_{ab} は単独では保存しないが，しかし場及び荷電した物質の全ストレスエネルギーテンソルは依然として保存する．

Poincaré の補題の逆をとると，(4.2.24) 式は次のようなベクトル場 A^a (ベクトルポテンシャルと呼ばれる)

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a \quad (4.2.28)$$

が存在することを意味する． A^a を使うと，Maxwell 方程式は

$$\partial^a (\partial_a A_b - \partial_b A_a) = -4\pi j_b \quad (4.2.29)$$

となる．われわれは，ある関数 χ の勾配 $\partial_a \chi$ を A_a に加えるゲージの自由度を持っている．というのは，(4.2.28) 式から，ゲージ変換で F_{ab} は不変であるからである． χ に対する式

$$\partial^a \partial_a \chi = -\partial^b A_b \quad (4.2.30)$$

を解くことで，Lorentz ゲージ条件

$$\partial^a A_a = 0 \quad (4.2.31)$$

を満たすようにゲージ変換ができる．この場合，平坦な時空間での微分の交換性を用いると，式 (4.2.29) は

$$\partial^a \partial_a A_b = -4\pi j_b \quad (4.2.32)$$

となる．

Maxwell 方程式の解で，(振幅一定で振動する) 波動の形のものを探そう．

$$A_a = C_a \exp(iS) \quad (4.2.33)$$

ここで C_a は定ベクトル場 (ノルムが定数でどこでもそれ自身に平行) であり，関数 S は波動の位相 (*phase*) と呼ばれる． $j^a = 0$ という解を満たすには，位相は ((4.2.32) から)

$$\partial^a \partial_a S = 0 \quad (4.2.34)$$

$$\partial_a S \partial^a S = 0 \quad (4.2.35)$$

と，((4.2.31) から)

$$C_a \partial^a S = 0 \quad (4.2.36)$$

を満たさなければならない．ところで，計量を持つ多様体上での任意の関数 f について，ベクトル $\nabla^a f$ は f 一定の面に対して垂直である．というのは面に接する任意のベクトル t^a について， $t^a \nabla_a f = 0$ だからである．式 (4.2.35) は， S が一定の面に対する法線 $k^a = \partial^a S$ はヌルベクトル $k_a k^a = 0$ ということを示している．式 (4.2.35) の微分から

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_b (\partial_a S \partial^a S) \\ &= 2(\partial^a S)(\partial_b \partial_a S) \\ &= 2(\partial^a S)(\partial_a \partial_b S) \\ &= 2k^a \partial_a k_b \end{aligned} \quad (4.2.37)$$

となる．つまり， k^a の積分曲線はヌルな測地線である．実際，式 (4.2.35) から (4.2.37) の導出は (∂_a を ∇_a で置き換えることで) 曲がった時空間でも有効であるので，Lorentz 時空間のヌルな超曲面はヌルな測地線で生成される．4元速度 v^a の観測者から測定した，波動の周波数 (波動の位相の変化率のマイナス) は

$$\omega = -v^a \partial_a S = -v^a k_a \quad (4.2.38)$$

で与えられる．

式 (4.2.33) の最も重要な解は，平面波

$$S = \sum_{\mu=0}^3 k_{\mu} x^{\mu} \quad (4.2.39)$$

である．ここで $\{x^{\mu}\}$ は大局的な慣性座標で， k_{μ} は定数である（したがって k_{μ} は定ベクトル場である）．Fourier 変換の理論から，Maxwell 方程式の（空間的に遠方で十分早く 0 になる）全ての性質の良い解は，平面波の重ね合わせで表現できる．

これまでの我々の分析は，電磁場の擾乱，つまり光の信号は，ヌルの測地線上 (4.2.37) を伝搬することを示唆している．実際，この予想は正しい：Maxwell 方程式の遅延グリーン関数は過去の光円錐に閉じ込められた台 (support) をもつので，事象 p に到達するような源からの電磁場の放射は，源が p の過去の光円錐上にあることのみ依存する．このようにして，これまで我々が使ってきた「光円錐」という用語は，Maxwell 方程式で正当化された．実際，光は光円錐にそって伝搬する．

4.3 一般相対論

Maxwell 理論は，電気，磁気，光の非常に成功した理論で，特殊相対論の枠組みにきれいに取り入れられた．したがって，次の論理的な段階はもう一つの古典的な力である重力の新しい理論を開発する事であろう．その新しい理論は，Maxwell 理論が Coulomb の静電気を一般化したのと同じように，Newton 理論を一般化して特殊相対論と両立するようにするだろう．しかしながら，Einstein はまったく別の経路を選び，時空間構造と重力の新しい理論である一般相対論を発展させた．

（重力場では全ての物体は同じように落下するという）等価原理が，重力の新しい観点を発展させるのに重要なことを見るために，特殊相対論で電磁場をどのように測定するのか考察してみる．第1段階は電磁気力や他の力を受けない「背景の観測者達」（つまりそれらは電氣的に中性で磁気双極モーメントを持たないなど）を設定することである．それらの観測者は慣性系であり，運動の測地線方程式 (4.2.6) を満たす．次の段階は電荷を持つ試験物体を放つことである．この物体の世界線は (4.2.26) を満たし，（十分多数の試験物体について）慣性運動からのずれを測定することで F_{ab} を決めることが出来る．

もし、我々がこの手続きを重力に当てはめると、厳しい問題に直ちに直面する。等価原理から、観測者または物体を重力場から「絶縁する」手段が無い、したがって電磁気学で用いたような慣性系の観測者を構築する、単純かつ直接的な物理的手続きを、我々は持たない。どのような観測者も試験物体とまったく同じように動くので、試験物体と比較すべき自然な「背景運動」を持たない。したがって、重力の力の場を測定する単純かつ直接的な方法を我々は持たない。もちろん、それらの構築と測定を遂行する複雑な手続きが存在するかもしれない。もし特殊相対論が正しければ、慣性系の観測者を時空間の測定で構築できるだろう。つまり、(平坦な)時空間の計量は、時計と定規を用いて測ることができるだろうし、その測地線も決められるだろう。慣性系の測定者はロケットエンジンを備える必要があるかもしれないが、それを除くと重力の力の場を電磁気学と同じ方法で決めることができるだろう。等価原理は、Newton 理論の標準的な扱いで見なされていたのと同様に、重力の力の法則の特殊な偶然と見なすことができるだろう。

一般相対性理論の基本的な枠組みは、逆の可能性を考えることから生まれる：我々は原理的に特殊相対論の意味での慣性系の観測者を作れず、重力の力を計測出来ない。これは次のような大胆な仮説にまとめられる。特殊相対論で前提にされていたのとは異なり、時空間計量は平坦ではない。重力場で自由落下する物体の世界線は、単に(曲がった)時空間計量の測地線にすぎない。このようにして、「背景の観測者達」(時空間の計量の測地線群)は、以前重力の力の場の中での運動として見たものと自動的に一致する。結果として、重力を力の場として記述する意味のある方法を、我々は何も持たない；むしろ我々は重力を時空間の構造のある側面と見なすように強いられる。絶対的な重力の力は意味を持たないにもかかわらず、2つの近傍の点の相対的な重力の力(潮汐力)は意味があり、2つの自由落下する物体の相対加速度を観測することで測定できる。この相対的な加速度は、測地線偏差方程式(3.3.18)によって、時空間の曲率と直接関係付けられる。

重力の力などはないという一般相対論のこの観点は、地球表面で $980\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$ の重力場があるという良く知られた「事実」とどうすれば適合させるのか？標準のNewton力学の観点では、地球表面に置いた物体にかかる重力の力は表面が及ぼす抗力とつりあって、物体を平衡、つまり「静止」させることを思い出そう。一般相対論の観点では、物体に働く唯一の力は地球表面の力である。この力のため、物体は $980\text{cm}\cdot\text{s}^{-2}$ で加速される(測

地線の運動からずれる)。しかしながら、それは定常状態に止まっているが、それは地球近傍の曲がった幾何学の中では時間推進対称な軌道は計量の測地線とは違うからである。この例では、時間推進対称性を使って、好都合な背景となる観測者達の組を定義できるかもしれない。すると、地球の重力の力の場合を、定常状態に止まるのに物体が受けるべき加速度の逆符号をとったものと定義できるかもしれない。したがってこの場合は重力に対して力の場合をうまく意味あるものと定義できる。しかしながら（例えば複数の質量のある物体が相対運動をしているときのように）時間推進対称性が無い場合、重力の力を定義するのに使えるような、測地線と比較できる自然な曲線の組は存在しない。（この注意は、地球近傍の非定常な実験室の中の観測者にも当てはまる）。ということで、地球の重力の力の場合については意味があるように語ることができるが、これは非常に特殊な概念で、時間推進の対称性がある状況にのみ当てはまる。一般の状況では、好都合な背景となる観測者はなく、潮汐力（近い測地線の相対加速度）だけが良く定義されている。

一般相対論では、時空間は（平坦な計量 η_{ab} がその上に定義されている）多様体 R^4 とは主張しない。これ（時空間が平坦な R^4 多様体）は、潮汐力が無い（重力場が無い）ことに対応する可能性ではあるが、唯一の可能性ではない。一般相対論の枠組みは、時空間のローレンツ計量 g_{ab} が曲がっていることを許す。実際、重力場がある全ての状況で時空間は曲がっていないわけには行かないと、一般相対論は主張する。曲がった幾何を許すので、時空間は R^4 以外の多様体の構造を持つことがより自然である。そこで、一般相対論では時空間多様体に先験的 (*a priori*) な制約をしないことにする。一般相対論の最後の重要な要素は、時空間の幾何と物質分布を結びつける Einstein 方程式である。時空間は、ローレンツ計量 g_{ab} が定義されている多様体 M である。

一般相対論での物理法則は2つの基本原理に支配されている。(1) 一般共変性原理：計量 g_{ab} とその微分だけが、物理の方程式に出ることができるとき空間の唯一の量である。(2) 方程式は、 g_{ab} が平坦な場合には、特殊相対論で満たされる方程式に帰着しなければならない。

一般相対論の基本的枠組みは、 R^4 とは異なる多様体及び平坦でない計量を許容することだけが、特殊相対論の基本的枠組を変更しているので、我々は物理量を特殊相対論と同じタイプのテンソル場で表すことができる。このようにして、一般相対論でも粒子の運動は時間的な曲線で表現される；完全流体は4元速度 u^a 、密度 ρ 、圧力 P で記述される；電磁場

は反対称テンソル F_{ab} で記述される．これらの場で満たされる方程式を修正する必要があるだけである．上述の2つの原則は次のような単純な規則を示唆する：特殊相対論で成り立つ方程式で，特殊相対論の計量 η_{ab} を g_{ab} で置き換え， η_{ab} に伴う微分演算子 ∂_a を g_{ab} に伴う微分演算子 ∇_a で置き換える．

一般相対論でも，粒子の4元速度 u^a を，その世界線の単位接ベクトル (g_{ab} で測定) として定義する．自由粒子は測地線の運動方程式を満たす．

$$u^a \nabla_a u^b = 0 \quad (4.3.1)$$

ここで ∇_a は g_{ab} に伴う微分演算子である．もし粒子の加速度 $a^b = u^a \nabla_a u^b$ が0でなければ，力 $f^b = m a^b$ が粒子に働くといえる（ここで m は静止質量）．例えば，粒子が（静止）質量 m と電荷 q を持つとし，電磁場 F_{ab} 内に置かれたとすると，それは Lorentz 力の式

$$u^a \nabla_a u^b = \frac{q}{m} F^b{}_c u^c \quad (4.3.2)$$

を満たす．ここで添字は g_{ab} で上げ下げされる．つまり $F^b{}_c = g^{bd} F_{dc}$ である．粒子の4元運動量は

$$p^a = m u^a \quad (4.3.3)$$

で定義される．粒子の世界線上の事象に居る観測者からの，粒子のエネルギーは

$$E = -p_a v^a \quad (4.3.4)$$

である．ここで v^a は観測者の4元速度である．

一般相対論では，連続的な物質分布と場はストレスエネルギーテンソル T_{ab} で記述される．理想流体のストレステンソルは

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b) \quad (4.3.5)$$

で与えられ，運動方程式

$$\nabla^a T_{ab} = 0 \quad (4.3.6)$$

を満たす．これから

$$u^a \nabla_a \rho + (\rho + P) \nabla^a u_a = 0 \quad (4.3.7)$$

$$(P + \rho) u^a \nabla_a u_b + (\eta_{ab} + u_a u_b) \nabla^a P = 0 \quad (4.3.8)$$

が得られる．しかし，(4.3.6) 式の解釈は変えられる．観測者の集まりは，単位時間的ベクトル場 v^a で表される．共変で定数，つまり $\nabla_a v_b = 0$ となるようなベクトル場を見つけられれば， $\nabla^a(T_{ab}v^b) = 0$ となる．曲がった時空間での，Gauss の法則の対応物を応用すれば，エネルギー運動量 4 元ベクトル $J_a = -T_{ab}v^b$ (v^b で表される観測者から計測) にたいする (4.2.18) の形のエネルギー保存を得る．しかし，曲がった時空間では一般に， $v^a v_a = -1$ と $\nabla_{(a} v_{b)} = 0$ を満たす v^a をもはや見出すことができない．したがって，(4.3.6) が厳密なエネルギー保存を表すという議論は成り立たない．重力潮汐力は流体に仕事をすることができ，局所的に測定できるエネルギーを増加または減少できるので，物理的にはこれは意味がある．しかし，曲率半径と比べて小さい時空間の領域を考察すると，物理的に，この潮汐力は僅かな仕事しかできず，流体のエネルギーは近似的に保存するべきである．しかし，この時空間の領域にわたって，ベクトル場 $\nabla_b v^a \approx 0$ となるものを見出すことができ，式 (4.3.6) はこれらの観測者から測定したエネルギーの近似的な保存を表す．したがって，式 (4.3.6) は時空間の小さい領域での物質エネルギーの局所的な保存と解釈される．この解釈のおかげで，我々は式 (4.3.6) が理想流体のみならず全ての物質と場について成り立つことを期待する．

Klein-Gordon スカラー場により満たされる，曲がった時空間に対する最も自然な方程式の一般化は，「最低限の置き換え」 $\eta_{ab} \rightarrow g_{ab}$, $\partial_a \rightarrow \nabla_a$ のルールで与えられる．

$$\nabla^a \nabla_a \phi - m^2 \phi = 0 \quad (4.3.9)$$

場のストレステンソルは

$$T_{ab} = \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \frac{1}{2} g_{ab} (\nabla_c \phi \nabla^c \phi + m^2 \phi^2) \quad (4.3.10)$$

であり， $\nabla^a T_{ab} = 0$ を満たす．しかし (4.2.19) の可能な一般化は無数にある．例えば， α を定数とするとき，

$$\nabla^a \nabla_a \phi - m^2 \phi - \alpha R \phi = 0 \quad (4.3.11)$$

はそのような一般化の一つである．実際，式 (4.3.11) で $\alpha = 1/6$ のものは，共形不変な性質から，自然に由来する．

曲がった時空間での Maxwell 方程式は

$$\nabla^a F_{ab} = -4\pi j_b \quad (4.3.12)$$

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \quad (4.3.13)$$

となる．電磁場のストレステンソルは，方程式 (4.2.27) で η_{ab} を g_{ab} で置き換えたもので与えられる．

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi} \left\{ F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{de}F^{de} \right\} \quad (4.3.14)$$

再び，式 (4.3.13) から，ベクトルポテンシャル A_a を (少なくとも局所的には) 導入できる．しかし，Lorentz ゲージでの A_a に対する Maxwell 方程式は，(4.2.32) の導出での微分の交換に由来する曲率の項を含んでいる．

$$\nabla^a \nabla_a A_b - R^d{}_b A_d = -4\pi j_b \quad (4.3.15)$$

これは，我々の最小限の置き換えの規則の重要な欠陥を示している．Maxwell 方程式として (4.2.32) の形のもので最小限の置き換えをしていれば，(4.2.15) で Ricci テンソル項のないものを得ただろう．この場合， $R^d{}_b A_d$ 項のないものよりも式 (4.3.15) の方が良い．理由は (4.3.15) はカレントの保存 $\nabla_a j^a = 0$ を意味するが，代わりの方程式はカレントを保存しない．

電磁場の変化の時空間のスケールが，曲率の変化よりも十分小さい状況では，Maxwell 方程式の解で，振幅ほぼ一定で振動する波動解

$$A_a = C_a \exp(iS) \quad (4.3.16)$$

を持つことが期待される．ここで C_a の微分は「小さい」．式 (4.3.16) を式 (4.3.15) で $j_b = 0$ に代入して「小さな」項 $\nabla_b \nabla^b C_a$ と Ricci テンソルを無視すると

$$\nabla_a S \nabla^a S = 0 \quad (4.3.17)$$

という式が得られる．つまり，位相が一定の面はヌルであり，したがって $k_a = \nabla_a S$ はヌルな測地線に接している．

時空間の幾何と物質分布の関係を記述する方程式は何か？ 重要な糸口が，潮汐力の記述の仕方を，ニュートン重力と一般相対論で比較することで得られる．Newton 理論では，重力場はポテンシャル ϕ で表すことが出来，2つの近接した粒子の潮汐加速度 (tidal acceleration) は $-(\vec{x} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi$ で与えられる．ここで \vec{x} は粒子の距離ベクトルである．これにたいして，一般相対論では，2つの近接した粒子の潮汐加速度は，(3.3.18) 式から， $-R_{cbd}{}^a v^c x^b v^d$ で与えられる．ここで v^a は粒子の4元速度で， x^a は偏差ベクトルである．これは

$$R_{cbd}{}^a v^c v^d \leftrightarrow \partial_b \partial^a \phi \quad (4.3.18)$$

という対応をとることを示唆する．しかし，Poisson 方程式から

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho \quad (4.3.19)$$

ここで ρ は物質の質量（つまりエネルギー）密度であり， $G = c = 1$ という単位系を使っている．さらに，上で議論したように，特殊及び一般相対論では，物質のエネルギーの性質はストレスエネルギーテンソル T_{ab} で記述され，対応

$$T_{ab}v^c v^d \leftrightarrow \rho \quad (4.3.20)$$

を得る．ここで v^a は観測者の4元速度である．

(4.3.18) と (4.3.20) の対応付けと，(4.3.19) をあわせると， $R_{cd}v^c v^d = 4\pi T_{cd}v^c v^d$ が示唆され，これは場の方程式 $R_{cd} = 4\pi T_{cd}$ を示唆する．しかしこれには大きな欠点がある．以前に議論したように，ストレステンソルは $\nabla^c T_{cd} = 0$ を満たしている．一方，縮約した Bianchi 恒等式 (3.2.31) からは $\nabla^c (R_{cd} - \frac{1}{2}g_{cd}R) = 0$ である．したがって， R_{cd} の式と $4\pi T_{cd}$ の式は $\nabla_d R = 0$ を意味しており，つまり R および $T = T^a_a$ が宇宙全体で一定である．これは物質分布にたいする非常に非物理的な制約であり，この方程式は棄却せざるをえない．

しかし，この困難は同時に解決法も示唆している．もし代わりに

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (4.3.21)$$

と言う式を考えると，もはや Bianchi 恒等式とエネルギーの局所的な保存は矛盾しない．実際 Bianchi 恒等式は，(4.3.21) が成り立てば，局所的なエネルギー保存を意味する．その上，前の方程式を動機付けた関係は壊されていない．式 (4.3.21) のトレースをとると

$$R = -8\pi T \quad (4.3.22)$$

を得る．したがって

$$R_{ab} = 8\pi(T_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}T) \quad (4.3.23)$$

ニュートン理論を適応すべき状況では，ほぼ「静止した」観測者から測定した物質のエネルギーは，($c = 1$ の単位で) 物質の応力よりはるかに大きいので， $T \approx -\rho = -T_{ab}v^a v^b$ を得る．したがって，この場合，(4.3.23) 式はやはり $R_{ab}v^a v^b \approx 4\pi T_{ab}v^a v^b$ を導く．

式 (4.3.21) は求めていた一般相対論の場の方程式である．これは Einstein により 1915 年に書き下され，*Einstein* 方程式として知られる．一

一般相対論の全体の内容は以下のようにまとめられるだろう：時空間はその上に Lorentz 計量 g_{ab} が定義された多様体 M である． g_{ab} の曲率は時空間の物資分布と Einstein 方程式 (4.3.21) で関係づけられる．

この節を締めくくる前に，Einstein 方程式の性質について，手短かに3つの指摘をしよう．1つ目の指摘は数学的性質についてである．座標系を選んで， $R_{\mu\nu}$ の座標基底成分を $g_{\mu\nu}$ で表すと，3章4節から $R_{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の2階までの微分に依存し，また $g_{\mu\nu}$ について非線形であることがわかる．

2つ目の指摘は，Einstein 方程式をどのように見るかである．ある意味では Einstein 方程式 (4.3.21) は Maxwell 方程式 (4.2.32) に類似していて．カレント j_a が電磁場の源の役割を果たすようにストレステンソル T_{ab} は重力場の源の役割を果たす．しかし重要な違いがある．初めに j_a を決めて Maxwell 方程式を解いて A_a を見出すのは意味がある．初めに T_{ab} を決めて Einstein 方程式を解いて g_{ab} を見出すように試みることができるかもしれない．しかし，これはあまり意味を成さない．というのも g_{ab} がわかるまでは，物理的に T_{ab} をどのように解釈するか不明である：実際，これまで考察した流体と場に関する T_{ab} の式は明示的に計量を含んでいる．したがって，一般相対論では，時空間の計量と物質分布を同時に解かなくてはならない．

最後の指摘は，物質の運動方程式に関するものである．理論を示した時には，初めに粒子，連続物質，場の運動方程式が仮定されて，それから物質分布を時空間の曲率に関連付ける Einstein 方程式が与えられた．しかし，Einstein 方程式は $\nabla^a T_{ab} = 0$ の関係式を意味し，この関係は物質の挙動について多くの情報を含んでいる．実際，完全流体の場合 $\nabla^a T_{ab} = 0$ は，運動方程式のすべての内容である．したがって流体の場合，単に T_{ab} の形を仮定するだけで前提を節約できるだろう：流体の運動方程式は Einstein 方程式に既に含まれている．注意すべきことだが， $P = 0$ の完全流体，つまり互いに力を及ぼさない「ダスト」の粒(複数)から構成された流体については， $\nabla^a T_{ab} = 0$ からの流体の運動方程式 (4.3.8) は，個々のダスト粒子は測地線の上を運動していることを意味する．より一般的には，関係式 $\nabla^a T_{ab} = 0$ は，自己重力が十分「弱い」ような十分「小さい」物体はいかなるものでも，測地線上を移動しなければならない (Fock 1939; Geroch and Yang 1975)．それで，実質的に Einstein 方程式単独で，試験物体の世界線は時空間の計量の測地線であるという測地線仮説 (*geodesic hypothesis*) を意味する．これは，一般相対論の基本的枠組みと Einstein 方程式の重要な自己整合性を示している．しかし，重力場の潮汐力を感じ

じるほど十分「大きな」物体は測地線の運動からずれることに注意しよう。そのような物体の運動方程式は、やはり $\nabla^a T_{ab} = 0$ の条件から見出すことができる (Papapetrou 1951; Dixon 1974)。

4.4 重力の線形化：ニュートン極限と重力波

この節の目的は、重力が「弱い」近似を扱うことである。一般相対論の文脈では、これは時空間の計量がほぼ平坦ということの意味する。実際、重力崩壊とブラックホールに関する現象と、宇宙の大規模構造に関する現象を除くと、これは自然の大変優れた近似になっている。

実際の時空間の計量の、平坦な計量 η_{ab} からのズレ

$$g_{ab} = \eta_{ab} + \gamma_{ab} \quad (4.4.1)$$

γ_{ab} は「小さい」と想定しよう。(時空間には自然な正定値な計量がないので、テンソルの「小ささ」を計るノルムがない。この文脈での「小ささ」の適切な定義は、ある大局的な慣性座標系 η_{ab} において、 γ_{ab} の成分 $\gamma_{\mu\nu}$ が 1 より十分小さいことである)。「重力の線形化」で意味するのは、式 (4.4.1) を Einstein 方程式の g_{ab} に代入して、 γ_{ab} について線形な項のみを保持する近似のことである。

平坦な計量 η_{ab} に伴う微分演算子を ∂_a で表すことにする。テンソル添字の上げ下げに隠れた γ_{ab} を使うことを避けるには、テンソル添字の上げ下げに、 g_{ab} や g^{ab} よりも η_{ab} や η^{ab} を使う方が便利である。1つの例外を除いて、この節では以降この表記規約を用いることにする。テンソル g_{ab} 自身は、 $\eta^{ac}\eta^{bd}g_{cd}$ ではなく、計量の逆を示すものとする。線形近似では

$$g^{ab} = \eta^{ab} - \gamma^{ab} \quad (4.4.2)$$

となることに注意しよう。というのは、式 (4.4.1) の右辺と式 (4.4.2) の右辺の積は、単位演算子から γ_{ab} の 2 次しか変わらないからである。

線形化された Einstein 方程式は、次のような方法で簡単に求められる。大局的な慣性座標系では、 γ_{ab} の 1 次までで Christoffel 記号は

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2}\eta^{cd}(\partial_a\gamma_{bd} + \partial_b\gamma_{ad} - \partial_d\gamma_{ab}) \quad (4.4.3)$$

である． γ_{ab} の 1 次まで，Ricci テンソル (3.4.5) は

$$\begin{aligned} R_{ab}^{(1)} &= \partial_c \Gamma_{ab}^c - \partial_a \Gamma_{cb}^c \\ &= \partial^c \partial_{(b} \gamma_{a)c} - \frac{1}{2} \partial^c \partial_c \gamma_{ab} - \frac{1}{2} \partial_a \partial_b \gamma, \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

である．ここで $\gamma = \gamma^c_c$ である．したがって，1 次のオーダーまでで Einstein テンソルは

$$\begin{aligned} G_{ab}^{(1)} &= R_{ab}^{(1)} - \frac{1}{2} \eta_{ab} R^{(1)} \\ &= \partial^c \partial_{(b} \gamma_{a)c} - \frac{1}{2} \partial^c \partial_c \gamma_{ab} - \frac{1}{2} \partial_a \partial_b \gamma - \frac{1}{2} \eta_{ab} (\partial^c \partial^d \gamma_{cd} - \partial^c \partial_c \gamma) \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

である．この表現は

$$\bar{\gamma}_{ab} = \gamma_{ab} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \gamma \quad (4.4.6)$$

と定義することで単純化できる． $\bar{\gamma}_{ab}$ を使うと，線形化された Einstein 方程式は

$$G_{ab}^{(1)} = -\frac{1}{2} \partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} + \partial^c \partial_{(b} \bar{\gamma}_{a)c} - \frac{1}{2} \eta_{ab} \partial^c \partial^d \bar{\gamma}_{cd} = 8\pi T_{ab} \quad (4.4.7)$$

となることが分かる．

付録 C で詳しく議論するように，一般相対論には微分同型の群に対応するゲージ自由度がある： $\phi: M \rightarrow M$ が時空間の微分同型とすると，計量 g_{ab} と $\phi^* g_{ab}$ は同じ時空間の幾何を表現する (ϕ^* は ϕ から誘導されたテンソル場の上の写像である)．線形近似において，これが意味するのは 2 つの摂動 γ_{ab} と γ'_{ab} が同じ物理的な内容を表すのは，平坦な計量 η_{ab} 上の「無限小微分同型」の作用の分だけ異なる場合だけで，かつその場合のみに限られるということである．2 章 2 節で議論したように「無限小微分同型」はベクトル場 ξ_a で生成され，付録 C で議論するようにそのような無限小微分同型で誘導されるテンソル場の変化は Lie 微分を定義する．これは γ_{ab} と $\gamma_{ab} + \mathcal{L}_\xi \eta_{ab}$ は，同じ物理的摂動を記述することを意味する．付録 C から， $\mathcal{L}_\xi \eta_{ab}$ は平坦な微分演算子 ∂_a で

$$\mathcal{L}_\xi \eta_{ab} = \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a \quad (4.4.8)$$

と表すことができる．これは線形化した重力には

$$\gamma_{ab} \rightarrow \gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a \quad (4.4.9)$$

で与えられるゲージ自由度があることを意味する．これは，電磁場のゲージ自由度 $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_a \chi$ と非常に密接に類似している． γ_{ab} のこのゲージ自由度は，付録 C の機構を使わなくても，テンソル変換則 (2.3.8) から導くことができる．式 (2.3.8) によると， γ_{ab} と $\gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a$ の成分は，1次まででは，単に座標変換しか異ならず，それゆえ同じ物理的摂動を表現している．

我々はこのゲージ自由度を，線形化された Einstein 方程式を単純化するために用いることができる．方程式

$$\partial^b \partial_b \xi_a = -\partial^b \bar{\gamma}_{ab} \quad (4.4.10)$$

を ξ^a について解くことにより，式 (4.4.9) のゲージ変換をして

$$\partial^b \bar{\gamma}_{ab} = 0 \quad (4.4.11)$$

を得る．これは Lorentz ゲージ条件に類似している．このゲージでは，線形化された Einstein 方程式は単純化されて

$$\partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} = -16\pi T_{ab} \quad (4.4.12)$$

となり，Maxwell 方程式 (4.2.32) と非常に類似している．

真空中 ($T_{ab} = 0$) では，式 (4.4.11) と式 (4.4.12) は Fierz と Pauli (1939) が書き下した，平坦な時空間を伝搬する質量の無いスピン 2 の場を記述する方程式に他ならない．このようにして，線形近似では，一般相対論は質量の無いスピン 2 の場の理論に帰着する．一般相対論の完全な理論は，非線形に自己相互作用している質量の無いスピン 2 の場の理論と見なすことができる．しかしながら，場の質量とスピンの概念は，背景の平坦な計量 η_{ab} の存在を要請しているが，これらは線形近似ではあるけれども完全な理論ではこれらは無いので，相対論では重力は質量の無いスピン 2 の場として扱われるという主張は，線形近似の文脈の枠外では正確な意味付けができない．

4.4.1 Newton 極限

重力が弱いとき，一般相対論の線形近似は有効なはずである． η_{ab} の大局的な慣性座標系で

$$T_{ab} \approx \rho t_a t_b \quad (4.4.13)$$

となるものがある．ここで $t^a = (\partial/\partial x^0)^a$ はこの座標系での「時間方向」である（式 (4.4.13) は T_{ab} は「時間－時間」成分のみと主張している！「時間－空間」成分の無視は本質的には速度（つまり運動量密度）が小さいとの言明で、「空間－空間」成分の無視はストレス（応力）が小さいとの言明である．）．源は「ゆっくり変化」しているので，時空間の幾何もゆっくり変化していると期待でき， $\bar{\gamma}_{ab}$ の時間微分が無視できるような式 (4.4.12) の解を探そう．

これらの前提で，我々の大局的な慣性座標系での (4.4.12) 式の成分は， $\mu = \nu = 0$ を除く全ての μ, ν にたいして

$$\nabla^2 \bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0 \quad (4.4.14)$$

で，一方

$$\nabla^2 \bar{\gamma}_{00} = -16\pi\rho \quad (4.4.15)$$

である．ここで ∇^2 は空間の通常の Laplace 演算子を表している．(4.4.14) 式の解で，無限遠で性質の良い挙動を示すものはただ一つ $\bar{\gamma}_{\mu\nu} = 0$ である（ $\bar{\gamma}_{\mu\nu} = \text{constant}$ の解も許されるが，ゲージ変換で 0 とすることができる．）．したがって，Newton 極限では摂動を受けた計量 γ_{ab} の解は

$$\gamma_{ab} = \bar{\gamma}_{ab} - \frac{1}{2}\eta_{ab}\bar{\gamma} = -(4t_a t_b + 2\eta_{ab})\phi \quad (4.4.16)$$

である．ここで $\phi \equiv -\frac{1}{4}\bar{\gamma}_{00}$ は Poisson 方程式

$$\nabla^2 \phi = 4\pi\rho \quad (4.4.17)$$

を満たす．

この曲がった時空間の幾何での試験物体の運動は，測地線の式

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \sum_{\rho, \sigma} \Gamma^\mu_{\rho\sigma} \left(\frac{dx^\rho}{d\tau} \right) \left(\frac{dx^\sigma}{d\tau} \right) = 0 \quad (4.4.18)$$

によって支配される．ここで $x^\mu(\tau)$ は大局的な慣性座標での粒子の世界線である．光速度よりずっと遅い運動に対しては，第 2 項の中の $dx^\alpha/d\tau$ は $(1, 0, 0, 0)$ と近似され，固有時間 τ は座標の時間 t で近似されるだろう．この様にして

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} = -\Gamma^\mu_{00} \quad (4.4.19)$$

を見出す。(4.4.16) 式の解から $\mu = 1, 2, 3$ にたいして

$$\Gamma^\mu{}_{00} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} \quad (4.4.20)$$

を得る。ここでも再び ϕ の時間微分は無視された。したがって、試験物体の運動は

$$\vec{a} = -\vec{\nabla} \phi \quad (4.4.21)$$

と言う式に支配される。ここで $\vec{a} = d^2 \vec{x} / dt^2$ は η_{ab} の大局的な慣性座標系に対する物体の加速度である。

式(4.4.17) と(4.4.21) は、もちろん Newton 重力の基礎方程式である。したがって一般相対論は、適切な極限で、Newton 重力に帰着する。一般相対論の予想は Newton 重力と一致したとはいえ、基本となる観点は根本的に異なることに注意しよう。Newton の観点では、太陽は地球に力を及ぼす重力場を生み出し、地球は直線ではなく太陽の回りに軌道を描く。一般相対論の観点では、太陽の質量エネルギーは時空間幾何の曲率を生み出す。地球は自由に運動(力は働かない)し、時空間の計量の測地線上を移動する；しかし時空間は曲がっているので太陽の回りを軌道運動する。Newton の観点では地球は加速度運動する；一般相対論の観点では平坦な計量 η_{ab} の観測者が加速度運動しなければならない。

源の運動の最低次を考慮したとき、線形化した重力の予想を吟味するのは教育的である。ストレスを無視すると、ストレスエネルギーテンソルは速度の1次で

$$T_{ab} = 2t_{(a} J_{b)} - \rho t_a t_b \quad (4.4.22)$$

と近似される。ここで $J_b = -T_{ab} t^a$ は、質量エネルギーカレントの4元ベクトルである。線形化された Einstein 方程式は、 $\bar{\gamma}_{ab}$ の空間-空間成分は源の無い波動方程式を満たすと予想するが、空間-時間と時間-時間成分はこんどは

$$\partial^a \partial_a \bar{\gamma}_{0\mu} = 16\pi J_\mu \quad (4.4.23)$$

を満たす。この様にして、 $A_a = -\frac{1}{4} \bar{\gamma}_{ab} t^b$ は Lorentz ゲージの Maxwell 方程式で源が J_a となるものを満足する。再び $\bar{\gamma}_{ab}$ の時間微分が無視できると仮定すると、 $\bar{\gamma}_{ab}$ の空間-空間成分は消え、試験物体の速度について線形なオーダーで、測地線の方程式は

$$\vec{a} = -\vec{E} - 4\vec{v} \times \vec{B} \quad (4.4.24)$$

となる．ここで \vec{E} と \vec{B} は， A_a を用いて電磁気学と同じ公式で定義したものである．これは，全体の符号が負ということと「磁気力」の因子 4 をのぞくと，電磁気学の Lorentz 力の ($q = m$ とした) 方程式と同じである．この様にして，重力の線形理論は，質量の運動は（電磁気学の磁気に類似の）重力磁気効果を生み出すと予想する (Lense-Thirring 効果，4 章の問題 4, Gravity Probe B 衛星 (2004)) ．

4.4.2 重力放射

静電場のクーロンの理論から電磁場の Maxwell の理論に移行するときのもっとも大きな変更の一つは，電磁場はダイナミックな実在であるということである．電磁場の放射は時空間を自由に伝搬できる．ニュートンの重力理論から一般相対性理論に移行する際も同様な変化が起きる：重力放射が存在する，つまり時空の曲率のさざなみが時空間を通して伝搬できる．線形近似では重力放射の伝搬は，源のない線形化された Einstein 方程式 (前述の (4.4.11) と (4.4.12) 式参照)

$$\partial^a \bar{\gamma}_{ab} = 0 \quad (4.4.25)$$

$$\partial^c \partial_c \bar{\gamma}_{ab} = 0 \quad (4.4.26)$$

に支配されている．

これらの方程式を，この節の初めに得るとき，(4.4.25) のゲージを選んだ．しかし，もし

$$\partial^b \partial_b \xi^a = 0 \quad (4.4.27)$$

ならば，さらにゲージ変換 $\gamma_{ab} \rightarrow \gamma_{ab} + \partial_a \xi_b + \partial_b \xi_a$ を行う自由度が残っている．というのも，この様なゲージ変換は (4.4.25) を不変に残すからである．これは電磁場において Lorentz ゲージ条件がユニークにベクトルポテンシャル A_a を決めるわけでは無いという事実と類似している：

$$\partial^b \partial_b \chi = 0 \quad (4.4.28)$$

で， $A_a \rightarrow A_a + \partial_a \chi$ と言う制限されたゲージ自由度がある．電磁場の放射を扱うとき，残りのゲージ自由度を使って，ある大局的な慣性座標系で，源が無い領域 ($j_a = 0$) で，成分 A_0 を零とするのが便利である．このゲージ条件は，*Coulomb* または *radiation* ゲージ と呼ばれるが，次のようにして達成できる．大局的な慣性座標系の定時間の面 $t = t_0$ の上で

$$\nabla^2 \chi = -\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (4.4.29)$$

を解く．時空間全体での (4.4.28) 式の解であって， $t = t_0$ 面での初期値は (4.4.29) 式で与えられ，時間微分の初期値は $\partial\chi/\partial t = -A_0$ で与えられるものを χ と定義する．すると

$$f = A_0 + \partial\chi/\partial t \quad (4.4.30)$$

で定義される関数 f は，(4.2.32) と (4.4.28) から

$$\partial^a \partial_a f = -4\pi j_0 \quad (4.4.31)$$

を満足するだろう．さらに，初期値の面 $t = t_0$ の上で

$$f = 0 \quad (4.4.32)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial A_0}{\partial t} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \nabla^2 \chi = 0 \quad (4.4.33)$$

を得る．したがって，考察している領域に源が無ければ，(4.4.32) と (4.4.33) の初期値の，(4.4.31) 式のユニークな解は $f = 0$ である．そしてゲージ変換 $A_a \rightarrow A_a + \partial_a \chi$ は，Lorentz ゲージ条件を保ちながら，望む条件 $A_0 = 0$ を達成する．

大変良く似たやり方で，線形化された重力の場合，源の無い領域 ($T_{ab} = 0$) 内部で radiation ゲージ $\gamma = 0$ ， $\gamma_{0\mu} = 0$ ($\mu = 1, 2, 3$) を達成するために，制限されたゲージ自由度式 (4.4.27) を使うことができる．副産物として，時空間全体で源が無く無限遠で良い挙動であれば， $\gamma_{00} = 0$ を得る．radiation ゲージを得るには，初期面 $t = t_0$ 上で方程式

$$2 \left(-\frac{\partial \xi_0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\xi} \right) = -\gamma \quad (4.4.34a)$$

$$2 \left[-\nabla^2 \xi_0 + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t} \right) \right] = -\frac{\partial \gamma}{\partial t} \quad (4.4.34b)$$

$$\frac{\partial \xi_\mu}{\partial t} + \frac{\partial \xi_0}{\partial x^\mu} = -\gamma_{0\mu} \quad (\mu = 1, 2, 3) \quad (4.4.34c)$$

$$\nabla^2 \xi_\mu + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \xi_0}{\partial t} \right) = -\frac{\partial \gamma_{0\mu}}{\partial t} \quad (\mu = 1, 2, 3) \quad (4.4.34d)$$

を解き， $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3$ の初期値とそれらの時間微分を得る．それから，それらの初期値を元に式 (4.4.27) を解いて ξ^a を決める．電磁場の場合と同様な議論で， ξ^a で生成されるゲージ変換は，ゲージ条件 (4.4.25) を保ったまま，源の無い領域で $\gamma = 0$ と $\gamma_{0\mu} = 0$ ($\mu = 1, 2, 3$) を満たすだろう．

副産物 $\gamma_{00} = 0$ は次のようにして導かれる． $\gamma = 0$ なので $\gamma_{ab} = \bar{\gamma}_{ab}$ を得る． $\mu = 1, 2, 3$ にたいして $\gamma_{0\mu} = 0$ なので，ゲージ条件 (4.4.25) は

$$\frac{\partial \gamma_{00}}{\partial t} = 0 \quad (4.4.35)$$

すると，線形化された Einstein 方程式 (4.4.12) から

$$\nabla^2 \gamma_{00} = -16\pi T_{00} \quad (4.4.36)$$

しかし，時空間全体で $T_{00} = 0$ ならば，式 (4.4.36) の解で無限遠での挙動が良いものはただ一つ γ_{00} が定数のものだけである．さらにゲージ変換すると，先に述べた条件を破ることなしに $\gamma_{00} = 0$ を達成する．

この radiation ゲージを使って，源の無い線形化した Einstein 方程式の解を探そう．平面波

$$\gamma_{ab} = H_{ab} \exp \left(i \sum_{\mu=0}^3 k_{\mu} x^{\mu} \right) \quad (4.4.37)$$

(H_{ab} は定数のテンソル場) は

$$\sum_{\mu} k^{\mu} k_{\mu} = \sum_{\mu, \nu} \eta^{\mu\nu} k_{\mu} k_{\nu} = 0 \quad (4.4.38)$$

の時，かつその時に限って式 (4.4.26) を満たすだろう．radiation ゲージ条件は ($\nu = 0, 1, 2, 3$ にたいして)

$$\sum_{\mu=0}^3 k^{\mu} H_{\mu\nu} = 0 \quad (4.4.39a)$$

$$H_{0\nu} = 0 \quad (4.4.39b)$$

$$\sum_{\mu=0}^3 H^{\mu}_{\mu} = 0 \quad (4.4.39c)$$

を要求する．式 (4.4.39a) と式 (4.4.39b) は両方共 $\sum_{\nu} H_{0\nu} k^{\nu} = 0$ を意味するので，これらの9つの方程式のうち8つのみが独立である． $H_{\mu\nu}$ の独立な成分は10個なので， H_{ab} にたいし2つの線形独立な解が残る．これらの2つの解は，平面重力波の2つの独立な偏極状態を記述する．真空での線形化された Einstein 方程式の任意の解は，これらの平面重力波の重ね合わせで表現できる．

重力放射の存在はどのようにして検出できるか? もっとも簡単な方法は, 2つの質量の相対加速度, つまり重力による潮汐力を測定する事である. 2つの近接した自由落下する物体にたいし, この加速度は測地線の偏差方程式 (3.3.18) に支配されている. 我々の場合, もし η_{ab} の大局的な慣性座標系の中で2つの物体がほとんど「静止」していれば,

$$\frac{d^2 X^\mu}{dt^2} = \sum_{\nu} R^{\mu}{}_{\nu 00} X^\nu \quad (4.4.40)$$

(X^a は偏差ベクトル) を得る. radiation ゲージ ($\gamma_{00} = 0$ とする) の中では, 式 (3.4.4) から, 線形化された Riemann テンソルの関係する成分に対する非常に簡単な表現を得る.

$$R_{\nu 00 \mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial t^2} \quad (\text{radiation gauge}) \quad (4.4.41)$$

こうして, 原理的には, 土台から自由につるされた2つの質量の間隔を精密に測定する事で, 重力放射を検出できるだろう; この様な検出法は, 近い将来には実用的になるだろう. 代わりに, 質量は自由に動くことができず固い素材で結合されていた場合, 重力潮汐力は素材に応力を及ぼす. それらの周期的応力によって, 固体の棒は振動をおこし, もし重力放射の周波数が棒の共鳴周波数に近ければ, この振動は検出可能だろう.

重力波はどのように生成されるのか? 重力放射の強いバーストの原因になりそうなのは, 重力が弱くなく線形近似が当てはまらないような崩壊からおきる. そのような場合には, 非線形な Einstein 方程式をきちんと解かなくてはならず, これを達成するのが困難なため, これらの過程に関する我々の知識はお粗末なものである. というわけで, 完全解が得られる線形近似での放射の生成を調べるのは, 教育的である. γ_{ab} の各成分は, 通常非斉次のスカラー波動方程式 (4.4.12) を満足するので, 解は, 源及びスカラー場と電磁気で使われたのと同じ遅延グリーン関数であたえられる. つまり,

$$\bar{\gamma}_{\mu\nu}(x) = 4 \int_{\Lambda} \frac{T_{\mu\nu}(x')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} dS(x') \quad (4.4.42)$$

ここで Λ は点 x の過去の光円錐を表し, 光円錐の体積要素は $dS = r^2 dr d\Omega$ である. $\bar{\gamma}_{ab}$ 上のゲージ条件 (4.4.11) は, 線形化された保存の式 $\partial^a T_{ab}$ のおかげで満足される. それで式 (4.4.42) は, 線形近似での源から生成される重力効果の解を与える. (当然だが, 源が存在するので radiation ゲージ条件は課さない)

我々は、全ての量の Fourier 変換を、空間変数は変換せずに、 η_{ab} の大域的な慣性座標系の時間変数 t について行う。我々は

$$\hat{\gamma}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\gamma}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) \exp(i\omega t) dt \quad (4.4.43)$$

と定義し、同様に $T_{\mu\nu}$ についても Fourier 変換する。式 (4.4.42) から

$$\hat{\gamma}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = 4 \int \frac{\hat{T}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \exp(i\omega|\vec{x} - \vec{x}'|) d^3x' \quad (4.4.44)$$

となる。ここで $\exp(i\omega|\vec{x} - \vec{x}'|)$ の「余分」な因子は、元々の積分 (4.4.42) は過去の光円錐について行っていることに起因する。 $\hat{\gamma}_{\mu\nu}$ の空間-空間成分についてのみ解けば良い。というのは $\hat{\gamma}_{0\nu}$ 成分は、ゲージ条件 (4.4.11) から得られ、

$$-i\omega \hat{\gamma}_{0\mu} = \sum_{\nu=1}^3 \frac{\partial \hat{\gamma}_{\nu\mu}}{\partial x^\nu} \quad (4.4.45)$$

となる。我々は放射を計算することに興味があるので、「遠方領域 (far zone)」 $R \gg 1/\omega$ (R は源からの距離) での解を求めれば十分である。この極限では、周波数は十分小さく因子 $\exp(i\omega|\vec{x} - \vec{x}'|)$ は源の領域でほとんど変化しない。そこで、 $\exp(i\omega|\vec{x} - \vec{x}'|)/|\vec{x} - \vec{x}'|$ を $\exp(i\omega R)/R$ と置き換え、積分の外に出すことができるだろう。残りの \hat{T}_{ab} の空間-空間成分の積分を次のように評価する

$$\begin{aligned} \int \hat{T}^{\mu\nu} d^3x &= \sum_{\sigma=1}^3 \left\{ \int \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\hat{T}^{\sigma\nu} x^\mu) - \int \frac{\partial \hat{T}^{\sigma\nu}}{\partial x^\sigma} x^\mu \right\} \\ &= -i\omega \int \hat{T}^{0\nu} x^\mu \\ &= -\frac{i\omega}{2} \int (\hat{T}^{0\nu} x^\mu + \hat{T}^{0\mu} x^\nu) \\ &= -\frac{i\omega}{2} \sum_{\beta=1}^3 \left\{ \int \frac{\partial}{\partial x^\beta} (\hat{T}^{0\beta} x^\mu x^\nu) - \int \frac{\partial \hat{T}^{0\beta}}{\partial x^\beta} x^\mu x^\nu \right\} \\ &= -\frac{\omega^2}{2} \int \hat{T}^{00} x^\mu x^\nu \end{aligned} \quad (4.4.46)$$

2 行目と 5 行目で Gauss の法則を用いて、また T_{ab} の保存を用いて空間成分の発散を時間成分の時間微分で表した。このようにして、遠方領域の解

$$\hat{\gamma}_{\mu\nu}(\omega, \vec{x}) = -\frac{2\omega^2 \exp(i\omega R)}{3R} \hat{q}_{\mu\nu}(\omega) \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3) \quad (4.4.47)$$

を得る．ここで， $\hat{q}_{\mu\nu}$ は4重極モーメントテンソル

$$q_{\mu\nu} = 3 \int T^{00} x^\mu x^\nu d^3x \quad (4.4.48)$$

のフーリエ変換である．式 (4.4.47) の逆フーリエ変換から

$$\hat{\gamma}_{\mu\nu}(t, \vec{x}) = \frac{2}{3R} \frac{d^2 q_{\mu\nu}}{dt^2} \Big|_{t'=t-R} \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3) \quad (4.4.49)$$

となる．ここで微分は遅延時刻 $t' = t - R$ で評価する．

$$G_{ab}^{(1)}[\gamma_{cd}] = 0 \quad (4.4.50)$$

$$\begin{aligned} R_{ab}^{(2)} &= \frac{1}{2} \gamma^{cd} \partial_a \partial_b \gamma_{cd} - \gamma^{cd} \partial_c \partial_{[a} \gamma_{b]d} \\ &+ \frac{1}{4} (\partial_a \gamma_{cd}) \partial_b \gamma^{cd} + (\partial^d \gamma^c_b) \partial_{[d} \gamma_{c]a} \\ &+ \frac{1}{2} \partial_d (\gamma^{dc} \partial_c \gamma_{ab}) - \frac{1}{4} (\partial^c \gamma) \partial_c \gamma_{ab} \\ &- (\partial_d \gamma^{cd} - \frac{1}{2} \partial^c \gamma) \partial_{[a} \gamma_{b]c} \end{aligned} \quad (4.4.51)$$

$$G_{ab}^{(1)}[\gamma_{cd}^{(2)}] + G_{ab}^{(2)}[\gamma_{cd}] = 0 \quad (4.4.52)$$

$$G_{ab}^{(1)}[\gamma_{cd}^{(2)}] = 8\pi t_{ab} \quad (4.4.53)$$

$$t_{ab} = -\frac{1}{8\pi} G_{ab}^{(2)}[\gamma_{cd}] \quad (4.4.54)$$

$$E = \int_{\Sigma} t_{00} d^3x \quad (4.4.55)$$

$$\Delta E = - \int_{\Sigma} t_{00} dS^a \quad (4.4.56)$$

$$\Delta E = \int P dt \quad (4.4.57)$$

$$P = \quad (4.4.58)$$

$$Q_{\mu\nu} = q_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} q \quad (4.4.59)$$

例えば，質量 M 長さ L の棒が中心の回りに周波数 Ω で回転しているとき，重力波のエネルギー流束は

$$P_{\text{rod}} = \frac{2G}{45c^5} M^2 L^4 \Omega^6, \quad (4.4.60)$$

第5章 一様等方宇宙

5.1 一様性と等方性

宇宙論の分野では、観測データのみに基づいて理論を証明するのは大変困難である。我々の寿命、それどころか人類の文明の寿命の中でも、直接接触するのは宇宙の時空間の無視できるほど小さな領域に限られる。望遠鏡は人間の通常のスケールよりずっと遠くの物体を観察できるけれども、宇宙論の観点からは過去の光円錐の一部の情報をもたらしているだけということを経験しなければならぬ。なので、我々の哲学的先入観が宇宙論の分野での入力 (input) のかなりの部分を占めている。観測データはそれらの先入観を確認するかもしれないが、一般にはそれらが正しいと明確に証明することは期待できない。にもかかわらず、この章で考慮する宇宙論モデルは宇宙の性質を驚くほどうまく説明してきた。

コペルニクスの時代から、我々は宇宙の特別な場所を占めているわけでもないこと：宇宙の他の領域にいたとしても周囲の基本的な性質は同じだろうということ、は一般に前提とされてきている。同様に、宇宙は等方的；つまり空間には特別な方向がない；十分に大きなスケールでの観測は方向によらない結果になるべき、と前提するのは自然である。これらの一様性と等方性の哲学的先入観は、近代的な観測から強い支持を受けている。宇宙の銀河の分布の観測は、距離スケールの広い範囲で銀河のクラスタリングを示していることと、最近の観測は銀河の無い広い領域を示している (Kirshner et al. 1981) にもかかわらず、もっとも大きなスケールでは銀河の分布は一様で等方的に見える。電波源のカウントと、 X 線と γ 線の背景放射の等方性も、大きなスケールでの宇宙の一様等方性の仮定を支持している。宇宙の一様等方性に対するより強い観測的証拠は、宇宙を満たす約 $3K$ の熱放射の発見から来ている。それは非常に高い精度で等方的と測定されている。5章4節で議論するように、この放射は宇宙論的起源をもつと信じられており、宇宙の一様等方性の仮説が大規模なスケールで非常に良い近似で成立してなければ、約 $3K$ の

熱放射の存在とその等方性を説明するのは大変困難だろう。

ということで、この章ではこれ以降宇宙は一様で等方という前提で進むことにしよう。我々の最初の任務は、この前提の数学的な意味を精密に定式化することである。大雑把に言えば、一様性が意味するのは、ある「時間の時点 (instant of time)」において「空間 (space)」の各点が「同じように見える」ことである。正確な定式化は次のようである：時空間が (空間的に) 一様 (*homogeneous*) であるのは (時空間を図 5.1 のように分割する) 空間的な超曲面 (複数) Σ_t の 1 パラメーター族で以下のようなものが存在するときである：各 t と各点 $p, q \in \Sigma_t$ に対して、時空間の計量 g_{ab} の等長写像 (isometry) で p を q に移すようなものが存在する。(等長写像の定義については付録 C 参照)

等方性については、最初に指摘しておくべきことだが、一般に各点で精々 1 人の観測者が宇宙を等方的とみなすことができるだけである。例えば、通常物質が宇宙を満たしていれば、物質に対して相対的に運動している観測者は物質の非等方的な速度分布を見るはずである。この事実を念頭におくと、等方性の概念の精密な定式化は次のようにできる：時空間が各点で (空間的に) 等方 (*isotropic*) であるのは、時空間を満たすような、合同な時間的な曲線群 (つまり観測者達) でその接ベクトルは u^a で (図 5.2)、次の性質を満たすものが存在する場合である。任意の点 p と 2 つの「空間的」な単位接ベクトル $s_1^a, s_2^a \in V_p$ (つまり p で u^a に垂直なベクトル) をとったとき、 p と u^a はそのまま s_1^a を s_2^a へ回転するような g_{ab} の等長写像が存在する。ということで、等方的な宇宙では u^a に垂直な、幾何学的に特別な接ベクトルを構成することはできない。

一様で等方な時空間の場合、一様性の曲面 Σ_t は等方的な観測者達の世界線への接ベクトル u^a と直交しなければならないことを理解するのは難しくない。もしそうでなければ、等方的な観測者達と一様な超曲面 Σ_t の族がユニークとすると、 u^a に垂直な接部分空間が Σ_t の接部分空間と一致しないということから、幾何学的に特別な空間的な接ベクトルを構成することができるし、それは等方性を破る。時空間の計量 g_{ab} は、各点 $p \in \Sigma_t$ で g_{ab} を Σ_t に接するベクトルに制限することで、 Σ_t 上でのリーマン計量 $h_{ab}(t)$ を導き出せる。超曲面 Σ_t 上の導き出された空間の幾何学は次のような要請で強く制限されている：(i) 一様性から任意の点 $p \in \Sigma_t$ を $q \in \Sigma_t$ に動かす h_{ab} の等長写像がなければならない。(ii) 等方性から Σ_t で幾何学的に特別なベクトルは構築が不可能である。

等方性からの 2 番目の要請は特に制限がきついことを示そう。 Σ_t 上の

h_{ab} から構成されたリーマンテンソル ${}^{(3)}R_{abc}{}^d$ を考える．3 番目の添字を h^{ab} で上げると，点 p での ${}^{(3)}R_{ab}{}^{cd}$ は p での 2 次形式のベクトル空間 W からそれ自身への線型写像 $L: W \rightarrow W$ と見なすことができる．式 (3.2.20) から， L は対称，つまり自己随伴な写像 (h_{ab} で決まる W 上の，自然な正定値な内積を伴う) である．したがって， W は L の固有ベクトルからなる正規直交基底を持つ．もしこれらの固有ベクトルの固有値が異なっていれば，点 p での特定の 2 次形式，つまり p での特別なベクトル，を選ぶ幾何学的手続きを構築できる．それゆえ，等方性を破らないためには， L のすべての固有値は等しくなければならない．このことは， L は恒等演算子の定数倍

$$L = KI \quad (5.1.1)$$

ということの意味する．つまり

$${}^{(3)}R_{ab}{}^{cd} = K\delta_{[a}^c\delta_{b]}^d \quad (5.1.2)$$

添字を下げると

$${}^{(3)}R_{abcd} = Kh_{c[a}h_{b]d} \quad (5.1.3)$$

を得る．

一様性の要請 (i) は K が定数でなければならない，つまり Σ_t の場所によって変化しない，と言うことを意味している．実のところ，各点での等方性の要請 (ii) は K が一定であることも意味しているのは興味深い．これを示すため，方程式 (5.1.3) を Bianchi 恒等式 (3.2.16) に代入すると

$$0 = D_{[e}{}^{(3)}R_{ab]cd} = (D_{[e}K)h_{|c[a}h_{b]d} \quad (5.1.4)$$

を得る．ここで D_a は Σ_t 上の h_{ab} に伴う微分演算子である (∇_a よりも D_a の記法を用いたのは，4 次元時空間上の g_{ab} に伴う微分演算子との混同を避けるためである)．3 次元以上の多様体の上では，式 (5.1.4) の右辺は $D_e K = 0$ のとき，かつその時に限り 0 となるので， K は定数である．こうして， Σ_t の幾何を議論するのに一様性の前提を省くことができる．

式 (5.1.3) を満たす ($K = \text{constant}$ の) 空間は定曲率空間 (*space of constant curvature*) と呼ばれる．次元も計量の符号数も K も同じ定曲率の任意の 2 つの空間は，(局所的には) 合同 (isometric) でなければならないことが証明できる (Eisenhart 1949)．だから， Σ_t の可能な幾何を求めるという任務は，全ての K に対する定曲率の空間を数え上げれば完了す

る．これは容易にできる． K が正の値は，3次元球面で実現される．つまり4次元の平坦なユークリッド空間 R^4 の中でデカルト座標が

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2 \quad (5.1.5)$$

を満たすようなものとして定義される．球座標では，単位3次元球面の計量は

$$ds^2 = d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (5.1.6)$$

である．値 $K = 0$ は，通常の3次元の平坦な空間で実現される．デカルト座標では，この計量は

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (5.1.7)$$

である．最後に， K が負の値は3次元双曲面で実現される．つまり4次元の平坦なローレンツ符号の空間 (Minkowski 時空間) で，大局的な慣性座標が

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = R^2 \quad (5.1.8)$$

を満たすようなものとして定義される．双曲座標では，計量は

$$ds^2 = d\psi^2 + \sinh^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (5.1.9)$$

である．

我々の宇宙の大局的な空間構造についての新たな可能性は強調すべきである．相対論以前の物理では，特殊相対論も同様だが，空間は，上記の $K = 0$ の可能性による平らな構造を持つと想定された．しかし，非常に限定された一様性と等方性の前提だけでも，一般相対論の枠組みは他の2つの可能性を許容する．3次元球面の空間幾何は特に興味がある．というのもそれはコンパクトな多様体で，有限で境界の無い宇宙を記述するからである．そのような宇宙は「閉じている」(*closed*) とよばれる．これにたいして平らまたは双曲面の幾何の非コンパクトな空間の宇宙は「開いている」(*open*) と呼ばれる．

等方的な観測者達は，一様性の曲面に直交しているので，4次元時空間の計量 g_{ab} は

$$g_{ab} = -u_a u_b + h_{ab}(t) \quad (5.1.10)$$

と表すことができる．ここで各 t に対して， $h_{ab}(t)$ は， Σ_t 上の (a) 球 (b) 平坦なユークリッド空間 (c) 双曲面，のどれかの計量である．4次元時空

上の便利な座標を次のように選ぶことができる。我々は、それぞれ、ある一様な超曲面の上で、(a) 球座標 (b) デカルト座標 (c) 双曲座標、を選ぶ。それから、それらの座標を他の超曲面へ、等方的な観測者を使って「移動させる」：つまりそれぞれの観測者に固定した空間座標ラベルを割り当てる。最後に、等方的な観測者によって運ばれる固有時間 τ で、われわれは各々の超曲面をラベル付けしよう（一様性から、すべての等方的な観測者は任意の 2 つ超曲面の間の時間差について同意しなければならない。）こうして τ と空間座標は、宇宙の各事象をラベルする。

これらの座標で表すと、時空間の計量は

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau) \begin{cases} d\psi^2 + \sin^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ d\psi^2 + \sinh^2 \psi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \end{cases} \quad (5.1.11)$$

と言う形をとる。ここでカッコの 3 つの可能性は空間幾何の 3 つの可能性に対応する。[空間的に平坦な場合に対応する計量は、球座標で $d\psi^2 + \psi^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$ と書くことで、他の場合との類似がもっとわかりやすくなる] 式 (5.1.11) の計量の一般的な形は *Robertson-Walker* 宇宙モデルと呼ばれる。このようにして、一様等方性の前提だけで、時空間の計量が 3 つの空間幾何の可能性と正の関数 $a(\tau)$ まで決まった。空間幾何と $a(\tau)$ を決めるため、Einstein 方程式に転じよう。

5.2 一様で等方な宇宙の動力学

今や我々の目標は、式 (5.1.11) の時空間の計量を、Einstein 方程式 (4.3.21) に代入して、宇宙の動力的発展についての予言を求めることである。第 1 段階は、宇宙の物質をそのストレス・エネルギーテンソル T_{ab} (Einstein 方程式の右辺) の形で記述することである。現在の宇宙の質量エネルギーの大部分は、銀河に集中している、通常物質の形で見出されると信じられている。我々が扱っている宇宙論的なスケールでは、各銀河はダストの粒 (*grain of dust*) と理想化できる。銀河のランダムな速度は小さいので、銀河のダストの圧力 (*pressure*) は無視できる。等方性から、銀河の世界線は等方的な観測者の世界線と一致しなければならない（もしそうでなければ、銀河と等方的な観測者の相対運動は特別な空間方向を定義するのに使うことが可能だろう）。ということで、良い近似で、現在の

宇宙の物質のストレス・エネルギーテンソルを

$$T_{ab} = \rho u_a u_b \quad (5.2.1)$$

という形をとる．ここで ρ は物質の (平均) 質量密度である．しかし，宇宙には別の形の質量エネルギーも存在する．既に簡単に述べたように，温度約 3K の輻射の熱分布が宇宙を満たしている．この輻射は，完全流体のストレス・エネルギーテンソルで記述できるが，その圧力は 0 ではない：実際，質量の無い熱分布に対しては $P = \rho/3$ である．現在の宇宙のストレス・エネルギーテンソルに対する輻射の寄与は無視できるが，この節や 5 章 4 節で議論するように，この輻射は初期宇宙の T_{ab} に主要な寄与をしていたと予想される．したがって，Einstein 方程式を扱うのに， T_{ab} を一般の完全流体の形

$$T_{ab} = \rho u_a u_b + P(g_{ab} + u_a u_b) \quad (5.2.2)$$

となるようにとることにする．この形の T_{ab} の考察に制限しても一般性は失われない．というのも，それは，一様等方性と整合するもっとも一般的な T_{ab} の形でもあるからである．

次に式 (5.1.11) から G_{ab} を計算し，式 (5.2.2) の $8\pi T_{ab}$ と等しいとおく．原理的には，添字 2 つの対称テンソルの 10 個の独立な成分に対応して，10 個の式を得るだろう．しかし，時空間の対称性から，この場合 2 つの独立な方程式のみである．つまり，ベクトル $G^{ab}u_b$ (と $T^{ab}u_b$) は空間成分を持つことができない．もしそうでなければ等方性は破れてしまう．それで，Einstein 方程式の「時間-空間」成分は恒等的に 0 である．同様に， G_{ab} の両方の添字を一様性の超曲面に射影して，添字の一つを空間の計量で上げると，式 (5.1.1) を導いたのと同様なタイプの議論で，そのテンソルは恒等演算子の定数倍でなければならない．それで，Einstein 方程式の「空間-空間」の非対角な成分は消えなければならない，「空間-空間」の複数の対角な成分は同じ方程式になる．このようにして，Einstein 方程式の独立な成分は，単純に

$$G_{\tau\tau} = 8\pi T_{\tau\tau} = 8\pi\rho \quad (5.2.3)$$

$$G_{**} = 8\pi T_{**} = 8\pi P \quad (5.2.4)$$

となる．ここで $G_{\tau\tau} = G_{ab}u^a u^b$ と $G_{**} = G_{ab}s^a s^b$ であり， s^a は一様性の超曲面に接する任意の単位ベクトルである．

今や我々のなすべきことは、 $G_{\tau\tau}$ と G_{**} を $a(\tau)$ を使って計算するだけになった．平坦な空間幾何，つまり

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (5.2.5)$$

の場合に，座標基底法を使うことで，これを実行しよう．式 (3.1.30) から，クリストッフェル記号の 0 でない成分は，

$$\Gamma^{\tau}_{xx} = \Gamma^{\tau}_{yy} = \Gamma^{\tau}_{zz} = a\dot{a}, \quad (5.2.6)$$

$$\Gamma^x_{x\tau} = \Gamma^x_{\tau x} = \Gamma^y_{y\tau} = \Gamma^y_{\tau y} = \Gamma^z_{z\tau} = \Gamma^z_{\tau z} = \dot{a}/a, \quad (5.2.7)$$

だけである．ここで $\dot{a} = da/d\tau$ である．そこで，式 (3.4.5) から，独立な Ricci テンソルの成分は

$$R_{\tau\tau} = -3\ddot{a}/a, \quad (5.2.8)$$

$$R_{**} = a^{-2}R_{xx} = \frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} \quad (5.2.9)$$

と計算される．

$$R = -R_{\tau\tau} + 3R_{**} = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right) \quad (5.2.10)$$

であるので，

$$G_{\tau\tau} = R_{\tau\tau} + \frac{1}{2}R = 3\dot{a}^2/a^2 = 8\pi\rho, \quad (5.2.11)$$

$$G_{**} = R_{**} - \frac{1}{2}R = -2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} = 8\pi P. \quad (5.2.12)$$

を得る．最初の式を使うと，2 番目の式は

$$3\ddot{a}/a = -4\pi(\rho + 3P) \quad (5.2.13)$$

と書き直せる．

球面と双曲面の幾何の場合も同様に計算すると，一様等方な宇宙に対する一般的な発展方程式を得る：

$$3\dot{a}^2/a^2 = 8\pi\rho - 3k/a^2, \quad (5.2.14)$$

$$3\ddot{a}/a = -4\pi(\rho + 3P) \quad (5.2.15)$$

ここで，3次元球面では $k = +1$ ，平坦な空間では $k = 0$ ，双曲面では $k = -1$ である．これらの方程式の厳密解を，ダスト ($P = 0$) と輻射

$$P = \rho/3$$

Spatial Geometry	“Dust” $P = 0$	Radiation $P = \frac{1}{3}\rho$
3-sphere, $k = +1$	$a = \frac{1}{2}C(1 - \cos \eta)$ $\tau = \frac{1}{2}C(\eta - \sin \eta)$	$a = \sqrt{C'}[1 - (1 - \tau/\sqrt{C'})^2]^{1/2}$
Flat, $k = 0$	$a = (9C/4)^{1/3}\tau^{2/3}$	$a = (4C')^{1/4}\tau^{1/2}$
Hyperboloid, $k = -1$	$a = \frac{1}{2}C(\cosh \eta - 1)$ $\tau = \frac{1}{2}C(\sinh \eta - \eta)$	$a = \sqrt{C'}[(1 + \tau/\sqrt{C'})^2 - 1]^{1/2}$

表 5.1: ダストと輻射に満たされた Robertson-Walker 宇宙論

の場合にたいして表 5-1 に示そう。だが、まず解の定性的な性質を調べてみよう。

最初の驚くべき結論は、 $\rho > 0$ と $P \geq 0$ という前提だけで、宇宙は静的ではありえないということである。この結論は、式 (5.2.15) から $\ddot{a} < 0$ なので、直ちに出てくる。したがって、宇宙は常に膨張しているか $\dot{a} > 0$ 、収縮しているか $\dot{a} < 0$ である（例外は膨張が収縮に変わる瞬間である）。この膨張または収縮の性質についての注意：すべての等方的な観測者（銀河）の間の距離のスケールは、時間と共に変化するが、膨張または収縮の特別な中心はない。実際、時刻 τ での等方的な観測者 2 名の間の距離を R とすると、 R の変化率は

$$v \equiv \frac{dR}{d\tau} = \frac{R}{a} \frac{da}{d\tau} = HR \quad (5.2.16)$$

である。ここで $H(\tau) = \dot{a}/a$ はハッブル (*Hubble*) 定数と呼ばれる。（しかし、 H の値は時間と共に変化する）。式 (5.2.16) はハッブルの法則と呼ばれる。注目すべきことだが、 R が十分大きいと、 v は光速よりも大きくなりうる。これは、特殊または一般相対論の基本的な教義である「何物も光速より早く移動できない」とは矛盾しない。というのはこの教義で述べているのは、同じ時空間の事象での 2 つの物体の局所的に測定された相対速度についてであって、離れた物体の大局的に定義された速度についてではない。

式 (5.2.16) と合う宇宙の膨張は遠距離の銀河の赤方偏移で確認されている。一般相対論のこの驚くべき予想の確認は、理論の劇的な成功である。残念ながら、物事の歴史的な進展はこの成功を曇らせた。アインシュタインは、動的な宇宙の予想に不満だったので、彼は自分の方程式の変

更, つまり次のような新しい項の追加:

$$G_{ab} + \Lambda g_{ab} = 8\pi T_{ab} \quad (5.2.17)$$

を提案した. ここで Λ は, 新しい自然基本定数で, 宇宙定数 (*cosmological constant*) と呼ばれる (局所的に計量とその2階までの微分から構築できる2階の対称テンソルで発散が0のものとしては, G_{ab} と g_{ab} の線形結合がもっとも一般的なものであることを示すことができる (Lovelock 1972)). それで, 式 (5.2.17) は, Einstein 方程式の基本的な性質を大きく変更しないもっとも一般的な修正である. $\Lambda \neq 0$ ならば, 運動が遅く弱い場の極限で Newton 理論を得ることができない; しかし Λ が十分小さければ, Newton 理論からのズレは気づかれないだろう). この1自由度のパラメーターを追加することで, 静的な解が存在するが, しかしパラメーターの正確な調整が必要であるし不安定でもある. こうして, アインシュタインは静的な解を持つように理論を修正できた. 1929年のハッブルの赤方偏移の観測が宇宙の膨張を示した後, Λ を導入した元々の動機はなくなった. これ以降, $\Lambda = 0$ と仮定する.

宇宙が膨張している $\dot{a} > 0$ とすると, 式 (5.2.15) から $\ddot{a} < 0$ を得るので, 過去に戻るにつれて宇宙はより早く膨張してなければならない. もし宇宙が現在のレートでいつも膨張していたなら, 時間 $T = a/\dot{a} = H^{-1}$ の過去で $a = 0$ となるだろう. 実際には膨張はもっと早かったので, a がゼロとなる時間は現在にもっと近かった. ということで, 一様等方という前提で, 一般相対論は H^{-1} より近い過去に宇宙は特異な状態 (全ての「空間の点」の距離はゼロ; 物質密度と時空間の曲率は無限大) であったという驚くべき予想をする. 宇宙のこの特異な状態はビッグバンと呼ばれる.

この特異性の性質は, 空間を「ゼロサイズ」まで一様に収縮することから出てくることに注意しよう. ビッグバンは, あらかじめあった特異でない時空間のある点に集中した物質が爆発しているわけではない. 時空間の構造それ自体がビッグバンで特異だったので, 物理的にも数学的にもビッグバン「以前」の宇宙の状態について問うことは意味が無い. 時空間多様体と計量を, ビッグバン特異点を越えて延長する自然な方法は無い. ということで, 一般相対論は宇宙はビッグバンではじまったという観点に導く.

宇宙の未来についての一般相対論の定性的な予想を議論する前に, 質量密度の発展の方程式を求めるのが有用である. 式 (5.2.14) に a^2 をかけ

て, τ について微分して (5.2.15) を使って \ddot{a} を消去することで

$$\dot{\rho} + 3(\rho + P)\dot{a}/a = 0 \quad (5.2.18)$$

を得る. それでダスト ($P = 0$) の場合には

$$\rho a^3 = \text{constant} \quad (5.2.19)$$

を得るが, これは静止質量の保存を表す. これに対して, 輻射 ($P = \rho/3$) の場合には

$$\rho a^4 = \text{constant} \quad (5.2.20)$$

を得る. この場合, エネルギー密度は a が増大するにつれ体積要素 a^3 よりも早く減少する. というのもそれぞれの体積要素の中の輻射は, 宇宙が膨張するにつれて環境に仕事をするからである (または, 光子についていえば, 光子の数密度は a^{-3} で減少するが, 各々の光子は赤方偏移 (5章3節参照) によって a^{-1} のようにエネルギーを失う). 式 (5.2.19) と (5.2.20) の比較が示すことは, 現在の宇宙では輻射は無視できるけれども, 十分過去 ($a \rightarrow 0$) では全質量密度に対する輻射の寄与は通常の物質に比べて支配的であったはずである.

我々の宇宙の将来の進化の定性的な様相は今や明らかになった. $k = 0$ または -1 ならば, 式 (5.2.14) から \dot{a} は決して 0 になることはない. したがって, 現在宇宙が膨張しているなら, 永遠に膨張し続けなければならない. 実際 $P \geq 0$ のいかなる物質に対しても, a が増加するにしたがい, ρ は a^{-3} (ダストに対する値) かそれより早く減少しなければならない. つまり $a \rightarrow \infty$ で $\rho a^2 \rightarrow 0$ となる. それで, $k = 0$ ならば「膨張速度」 \dot{a} は $\tau \rightarrow \infty$ で漸近的に 0 に近づき, $k = -1$ ならば $\tau \rightarrow \infty$ で $\dot{a} \rightarrow 1$ を得る.

しかし, $k = +1$ ならば, 宇宙は永遠には膨張はできない. 式 (5.2.14) の右辺第1項は, a が増加するにつれ, 第2項が増加するより早く減少し, また左辺は正でなければならないので, $a \leq a_c$ となる臨界値 a_c が存在する. さらに, $\tau \rightarrow \infty$ で a は漸近的に a_c に近づくことはできない. なぜなら, 式 (5.2.15) から \ddot{a} の大きさは下から制限されている. したがって, $k = +1$ ならば, 宇宙のビッグバン起源から有限時間で, 宇宙は最大値 a_c になり, それから再収縮する. 宇宙のビッグバン起源からの出来事の議論と同様にして, 再収縮から有限時間で宇宙の「ビッグクラッシュ」終焉がおきるだろう. このようにして, 一般相対論の動的方程式から空間的に閉じた3次元球面の宇宙は有限時間存在するだろう.

ダストと輻射の場合について式 (5.2.14) と (5.2.15) を厳密に解くことに戻ろう。これを実行するのにもっとも効率的な手続きは、式 (5.2.19) または (5.2.20) を使って ρ を消去して、式 (5.2.14) に代入することである。ダストの場合には

$$\dot{a}^2 - C/a + k = 0 \quad (5.2.21)$$

($C = 8\pi\rho a^3/3$ は定数)、輻射の場合には

$$\dot{a}^2 - C'/a^2 + k = 0 \quad (5.2.22)$$

($C' = 8\pi\rho a^4/3$) を得る。6つの場合のこれらの解は表 5.1 に示した。

5.3 宇宙の赤方偏移；地平線

5.3.1 赤方偏移

前述のように、宇宙膨張のもっとも直接的な観測的証拠は、離れた銀河のスペクトル線の赤方偏移から由来している。この節では一般的な Robertson-Walker 宇宙論モデル (5.1.11) に対する赤方偏移の方程式を求めよう。事象 P_1 時刻 τ_1 で、等方的な観測者が周波数 ω_1 の光子を放出したとする。この光子は事象 P_2 時刻 τ_2 で、別の等方的な観測者により観測されたとしよう。第2の観測者の測定する周波数 ω_2 を見出したい。

特殊と一般相対性理論での赤方偏移の問題の解は、次の2つの事実によっている：(1) 幾何光学近似、光はヌルな測地線の上を進む (4章3節参照)；(2) 4元速度 u^a の観測者により測定される波数 k^a の光の信号の周波数は

$$\omega = -k_a u^a \quad (5.3.1)$$

である (式 (4.2.38) 参照)。なので、発光点での初期値 k^a により決まるヌル測地線を計算し、観測点での式 (5.3.1) の右辺を計算することで観測される周波数を求めることができる。

しかし、対称性がある場合、付録 C-3 で証明される次の事実を使うことで、しばしばこの手続きを簡略にできる。 ξ^a を Killing ベクトル場、つまり (付録 C で議論する) 等長写像 (isometries) の1パラメーター群を生成するベクトル場としよう。 t^a を測地線に接するとする。すると、 $t^a \xi_a$ は測地線に沿って定数である。この場合、対称性の議論を持ち出さずに赤方偏移を直接計算するのは難しくないが、赤方偏移を対称性の議論を

使って計算することにする．というのは，それにより，なぜ単純な最終結果 (5.3.6) が得られるのか，より深い洞察が得られるからである．

最初の段階として，空間幾何の3つの選択全てに対して，時空間の Killing ベクトル場 ξ^a で， k^a を P_1 での Σ_1 の中へ射影した方向に向いており，かつ k^a を P_2 での Σ_2 の中へ射影した方向に向いているようなものを見出すことができることに注意しよう．例えば，平坦な空間幾何の場合，一般性を失わずに k^a の P_1 での Σ_1 の中への射影は $(\partial/\partial x)^a$ 方向に向くと仮定してよいだろう．すると最初は $k^a(\partial/\partial y)_a = k^a(\partial/\partial z)_a = 0$ で， $(\partial/\partial y)_a$ と $(\partial/\partial z)_a$ は Killing ベクトル場であるので，それらの内積は P_2 点でも0になる．したがって， k^a の P_2 での Σ_2 の中への射影はやはり $(\partial/\partial x)^a$ に向いており， $\xi^a = (\partial/\partial x)^a$ は求める Killing ベクトル場である．球面と双曲面の場合も，同様な議論で ξ^a が存在することが確認できる．さらに，すべての場合で P_1 での ξ^a の長さから P_2 での ξ^a の長さへの変化は， Σ_1 から Σ_2 へ動くにつれた宇宙の長さのスケール因子 a の変化に比例する．

$$\frac{(\xi^a \xi_a)^{1/2}|_{P_1}}{(\xi^a \xi_a)^{1/2}|_{P_2}} = \frac{a(\tau_1)}{a(\tau_2)} \quad (5.3.2)$$

赤方偏移を求めるには， k^a はヌルなので，どの点でも u^a 上へのその (k^a の) 射影は Σ の中への射影と同じ大きさでなければならないことに注意すると， P_1 で

$$k_a u_1^a = -k_a [\xi^a / (\xi^b \xi_b)^{1/2}]|_{P_1} \quad (5.3.3)$$

したがって

$$\omega_1 = [(k_a \xi^a) / (\xi^b \xi_b)^{1/2}]|_{P_1} \quad (5.3.4)$$

を得る．同様にして

$$\omega_2 = [(k_a \xi^a) / (\xi^b \xi_b)^{1/2}]|_{P_2} \quad (5.3.5)$$

を得る．

しかし，前述の Killing ベクトル場と測地線の接ベクトルの内積についての結果から $(k_a \xi^a)|_{P_1} = (k_a \xi^a)|_{P_2}$ をえる．したがって，

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{(\xi^b \xi_b)^{1/2}|_{P_1}}{(\xi^b \xi_b)^{1/2}|_{P_2}} = \frac{a(\tau_1)}{a(\tau_2)} \quad (5.3.6)$$

を得る．ここで式 (5.3.2) を使った．この結果は，宇宙が膨張すると，それぞれの光子の波長が膨張に比例して増加するという簡単な解釈を持つ．

赤方偏移因子 z は

$$z = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} - 1 = \frac{a(\tau_2)}{a(\tau_1)} - 1 \quad (5.3.7)$$

である．近くの銀河から放出される光については， R を銀河への現在の固有距離とすると $\tau_2 - \tau_1 \approx R$ である．さらに近くの銀河については

$$a(\tau_2) \approx a(\tau_1) + (\tau_2 - \tau_1)\dot{a} \quad (5.3.8)$$

を得る．したがって

$$z \approx \frac{\dot{a}}{a}R = HR \quad (5.3.9)$$

を得る．これは Hubble によって発見された赤方偏移と距離の線形関係である．遠い銀河の赤方偏移は，この線形則からはすれるだろうし，もっと詳しく $a(\tau)$ が τ でどのように変化するかによる．

5.3.2 粒子地平線

一般相対論の宇宙論的モデルの研究で次の疑問がおきる：原理的に，ある事象 P で宇宙はどれだけ観測できるか？ より正確には，Robertson-Walker 宇宙論的モデルの特定の場合に，事象 P の等方的観測者に到達するような信号を送ることができるのは，どの等方的な観測者（銀河）かと問うことができるだろう． P で見ることのできる世界線とできないものとの境界は P での粒子地平線 (*particle horizon*) とよばれる．ビッグバン特異性に近づくにつれ宇宙は「ゼロサイズに縮む」ので，宇宙の非常に初期には互いに非常に近いので全ての等方的な観測者は信号を送ることで互いに通信できると期待するかもしれない．しかし，ビッグバン特異性から十分早く膨張する，Robertson-Walker モデルの場合にはこれが当てはまらないことを示すことができる．そこで，Robertson-Walker モデルの (表 5.1 の解を含む) あるクラスでは，非自明な粒子地平線が存在することを示そう．

これをもっとも簡単に示せるのは平坦な空間幾何の場合

$$dt^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (5.3.10)$$

で，この場合に焦点を絞ろう．

$$t = \int \frac{d\tau}{a(\tau)} \quad (5.3.11)$$

で定義される座標変換 $\tau \rightarrow t$ を行うことで、式 (5.3.10) の計量を

$$ds^2 = a^2(t)(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (5.3.12)$$

と書き直すことができる。この形に書くと、この計量は平坦な Minkowski 時空間の計量の定数倍 (?) にすぎないことが明かになる。この様な計量は共形的に平坦 (*conformally flat*) と呼ばれる。この注意の重要性は、式 (5.3.12) の計量で、あるベクトルが時間的、ヌル、空間的となるのは、平坦な計量

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (5.3.13)$$

について、同じ性質をもつとき、かつそのときのみという事実からきている。ということで、式 (5.3.12) の計量において2つの事象間で信号を送れるのは、式 (5.3.13) の平坦な計量においてこれができる場合かつその時にのみに限る。これを念頭におくと、事象 P での観測者が他のすべての等方的な観測者から信号を受信できるのは、ビッグバン特異性に近づくとき $\tau \rightarrow 0$ に、 t を定義する式 (5.3.11) の積分が発散するときかつその場合に限られることを理解するのは難しくない。すなわち、この積分が発散するなら $-\tau \rightarrow 0$ で $a(\tau) \leq \alpha\tau$ (α 定数) という場合 – Robertson-Walker モデルは共形的に Minkowski 時空間全てと関係し、粒子地平線はないだろう。これに対して、積分が収束するなら、Robertson-Walker モデルは共形的に $t = \text{constant}$ 以降の Minkowski 時空間の一部とのみ関係し、粒子地平線は存在する。 $k = 0$ の場合、ダストでさえも $a(\tau) \propto \tau^{2/3}$ である。 $P > 0$ なら $a(\tau)$ はもっと大きくなるので、Einstein 方程式のすべての空間的に平坦な Robertson-Walker 解にたいして、式 (5.3.11) の積分は $\tau \rightarrow 0$ で収束し、粒子地平線は存在する。

双曲面と球面の幾何に対しては、 $\tau \rightarrow 0$ で $a(\tau)$ の挙動は平坦な場合に移行する。というのは、式 (5.2.14) の k に関する項は無視できるようになるからである。同様な解析で、これら全ての解でも平坦な場合と同様な性質の粒子地平線が存在することが示せる。球面幾何の場合、宇宙の空間的な広がりには有限で、「ビッグクランチ」特異性へつづれるときに粒子地平線は存在を止めるかまだ残っているか問うことができるだろう。答えは、ダストで満たされた球面宇宙に対しては、粒子地平線が存在を止めるのは膨張が最大の瞬間、つまりビッグバンで放たれた光の信号は膨張が最大の瞬間に宇宙のちょうど半分までの道のりを進む。それでこの時に全ての方向を見ることで、観測者は他の全ての等方的観測者からの信号を受け取ることができる。しかし、輻射に満たされた球面宇宙に

対しては、光の信号は宇宙の全歴史で宇宙の半分の道のりを進み、粒子地平線は「ビッグクランチ」まで残りつづける。

Robertson-Walker 宇宙モデルでの粒子地平線の存在は、次のような面白い話題につながる。宇宙のマイクロ波背景放射から、現在の宇宙は大変高い精度まで一様等方であると信ずる良い理由がある。ところで、箱に閉じ込められたガスのような多くの通常の系は、非常に一様等方な状態である。しかし、これらの系がこの様に一様等方な状態であることにたいする普通の説明は、相互作用して熱平衡する機会を持っていたからというものである。それで、例えば箱の中のガスが最初は一様でない状態でも、これらの非一様性は急速に「洗い流され」、その時間スケールは箱を走行する時間のオーダーである。しかし、この種の説明は、粒子地平線のある宇宙には当てはまらないだろう。というのは、宇宙の異なる部分は互いに信号を送ることすらできず、ましてや互いに熱平衡に達するほど十分相互作用できない。それで、現在の宇宙の一様等方性を説明するには、次のように仮定するしかない：(a) 宇宙は非常に一様等方な状態で「誕生した」または (b) 非常に初期の宇宙は Robertson-Walker モデルとは大きく大きく異なっていたので、地平線は無かった；非一様性と非等方性は「減衰した」— 多分、物体の粘性または量子的な粒子生成の反作用の効果によって — そして宇宙は Robertson-Walker モデルに近づいて行った。最初の「説明」は不自然に見えるだろう。2 番目の説明は非等方性の減衰に関連し、Misner (1969) の仕事から始まって、幅広く調べられた。しかし未だに「カオス的な」初期状態から Robertson-Walker モデルへの納得のいく描像を提示することがうまくいっていない。それはまた、自己重力系では十分大きなスケールの非一様性は、一般に減衰するよりも成長すると期待されるという、潜在的に深刻な困難を抱えている。しかし、最近、非常に初期の宇宙は「インフレーション過程 (inflationary phase)」を経験して、その結果 Robertson-Walker モデルでの粒子地平線が非常に大きく拡大し、初期の「カオス的な」宇宙が一様で等方な領域をもつものに進化したことを説明する可能性を示すことが、示唆されてきている。しかし、現在のところ、我々の宇宙の初期状態を説明するのに大きな役割を果たすであろう、重力の量子理論を我々は持っていないことを、心にとめておかなければならない。

5.4 我々の宇宙の進化

この節では、ビッグバンから現在までの我々の宇宙の歴史の概観を簡単にたどろう。我々が提示する描像は「標準的な」もので、宇宙はその歴史をとおして Robertson-Walker 解で良く記述され、宇宙の物質の内容についてのさらなる仮定もする。この描像は、宇宙マイクロ波背景放射の存在やヘリウムの宇宙での豊富さの説明で強く支持されているものの、前提のどれもが疑いの余地が無いわけではないわけではないことを念頭におこう。

初期宇宙の性質のかなりの部分は、過去に向かうにつれスケールファクター a が減少することで、あたかも箱に閉じ込められた物質にたいして壁が収縮しているのと同じ効果を、物質に及ぼしているという事実から理解できる。ということで、収縮する箱で起こるのと同様、通常物質(バリオン)と比べて放射の寄与は過去では増大している。現在の宇宙の宇宙マイクロ波背景放射のエネルギー密度は、物質密度の寄与の約 1000 倍小さいと推定されている。ということで、この放射が過去に遡っても存在し続けると仮定すると、式 (5.2.19) と (5.2.20) によるとスケール因子 a が現在の値より 1000 倍小さかった頃、この放射は宇宙のエネルギー密度に対して主要な寄与をしていたはずである。それで、この段階以前では放射が宇宙を満たしているモデルが宇宙のダイナミクスにたいして良い近似になるが、それ以降ではダストを満たされたモデルが良い近似になるはずであると期待できる。

箱の中のガスの温度が圧縮するにつれて上昇するように、宇宙の物質と放射は a が減少するにつれて熱くなり、ビッグバンに近づくにつれ無限大になると期待するだろう。初期の宇宙が放射優勢であったならば、全てのモデル ($k = 0, \pm 1$) で a と ρ の τ 依存性は、小さな τ に対しては、 $k = 0$ の解へと向かう。

$$a(\tau) = (4C')^{1/4} \tau^{1/2} \quad (5.4.1)$$

$$\rho = \frac{3}{32\pi G \tau^2} \quad (5.4.2)$$

この節を通して、式で G と c を戻すことにする。放射が熱分布しているならば、質量密度 ρ は次の表現で与えられる

$$\rho = \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i \frac{\pi^2}{30 \hbar^3 c^5} (kT)^4 \quad (5.4.3)$$

これは、質量の無い粒子の量子力学から導いた。ここで n は輻射の種類の数で、 g_i はスピン縮重度の因子、 α_i はボソンの場合 1、フェルミオンの場合 $7/8$ の値をとる。質量が kT より十分小さな粒子は、実質的に質量 0 の粒子として振る舞うので、式 (5.4.3) の中に「輻射の種類」として含めるべきである。式 (5.4.1)、(5.4.2)、(5.4.3) は、 $T \propto \rho^{1/4} \propto a^{-1}$ を意味するが、これは赤方偏移の関係の式 (5.3.6) で予想されていたことであつた。

初期の宇宙の物質と輻射の相互作用が、局所的（粒子地平線の内部）に熱平衡になるほど十分早く進むかどうかは、重要な点である。もしそうでなければ、物質が熱的に分布していると前提することの自己整合性は疑問となり、物質と輻射の進化は初期分布の詳細に依存する。もしそうならば（局所熱平衡）、平衡が保たれなくなるまで、熱的分布を發展させればよいし、これは相対的には容易なことである。宇宙の膨張の時間スケール t_E 、つまりスケール因子 a が有意に変化する時間は、式 (5.4.1) から

$$t_E \sim a/\dot{a} = 2\tau \quad (5.4.4)$$

である。これに対して、相互作用の時間スケールは

$$t_I \sim \frac{1}{n\sigma c} \propto \frac{a^3}{\sigma} \propto \tau^{3/2}/\sigma(T) \quad (5.4.5)$$

である。ここで相互作用する粒子の数は保存すると仮定するので、数密度 n は a^{-3} とスケールし、相互作用断面積 σ のエネルギー依存性は σ を温度の関数と書くことで明示的に示された。式 (5.4.4) と (5.4.5) を比較すると、 σ が高エネルギーで急速に低下しなければ、十分初期に $t_I \ll t_E$ となるだろうから、熱平衡は達成できる。一方、宇宙が進化すると、結局は $t_I > t_E$ となるので、物質分布は熱平衡から脱落するだろう。

前述の考察から、我々の宇宙の進化について次のような基本的な描像が導かれる。宇宙は、熱平衡にある物質と輻射の熱く ($T \rightarrow \infty$)、濃い ($\rightarrow \infty$) 「スープ」として始まった。しかし、宇宙が進化すると t_I が t_E より大きくなるので熱平衡は維持できなくなる。初期宇宙のエネルギーの内容は輻射が優勢である。しかし、 a が現在の値の $1/1000$ に到達するころに、通常の物質の寄与は宇宙のエネルギーの内容で優勢となり、宇宙のダイナミクスはダストで満たされた Robertson-Walker モデルのそれとなる。これから、この進化の歴史の重要な細部をいくつか埋めていこう。

古典的な一般相対論で予想される宇宙の進化の歴史の最初の 10^{-43} 秒の間、時空間の曲率の大きさはプランク長さ $(G\hbar/c^3)^{1/2} \approx 10^{-33}$ cm から

決まるスケールよりも大きかった。次元解析から、この時期では重力場の量子効果は非常に重要だったと予想されるので、古典的な一般相対論の予想は真剣にとることはできない。この時以降、古典的な一般相対論は意味があると期待できるが、非常に初期の宇宙で見出される極端な条件 ($\tau = 10^{-43} s$ では $\rho \sim 10^{92} \text{gcm}^{-3}$) ではこの時期の物質の振る舞いについての全ての言明は憶測に過ぎないことを強調する必要はほとんどないだろう。

プランク時間から数桁程度しか違わない、非常に初期の宇宙において2つの興味深く重要な効果が起きる。最初の物は非常に初期の宇宙のダイナミクスに関する。強い相互作用と電弱相互作用を統一しようと試みる量子場の理論のいくつかは、非常に高温では量子場の熱平衡状態は相転移を起こすことを予想する。それらのモデルでは、もし「過冷却」が起きれば、場のストレスエネルギーテンソル T_{ab} への重要な「真空」の寄与 $-\lambda g_{ab}$ (λ は大きな正の定数) があるであろうことを予想する。ということで、非常に初期の宇宙は、大きな正の宇宙項の空虚な宇宙で起きると同じダイナミクスであるような段階 (phase) を経過するだろう。それで、これらのモデルが正しければ、非常に初期の宇宙において宇宙が近似的に de Sitter 解で非常に急速に膨張する、「インフレーション」の時期があるだろう。もしこれが起きれば、5章3節の終わりで言及したように、現在の宇宙の粒子地平線は、表 5.1 の解から「ビッグバン」に戻るまで外挿して計算した粒子地平線よりずっと大きいかもしれない。

第2の効果はバリオンの生成に関係する。宇宙の物質はバリオンからなるということを信ずる強固な根拠がある；つまり物質と反物質の対称性はないということである。単純に我々の宇宙が反バリオンに対してバリオン過剰で誕生したというのはいえることだし、もしバリオン数が厳密に保存すればそうであるはずである。しかし、宇宙は物質-反物質対称な状態ではじまり、バリオン過剰は非常に初期の宇宙で生成されたというのも可能である。これが起きるためには、非常に初期の宇宙での高エネルギー粒子の相互作用が次のような性質を満たすことが必要である：(1) バリオン数の保存が成り立たない (2) 荷電共役 C とパリティと荷電共役の組み合わせ CP が保存していない (もしこれらの対称性のどちらかが保存していれば、バリオンと反バリオンは同数生成される) (3) 熱平衡からずれていること (粒子と反粒子は同じ質量を持つので、熱平衡では同じ数だけしょうじる) 非平衡な現象は (宇宙の温度が粒子の質量より下がった時点の) 膨張時間 t_E よりも崩壊寿命の長い質量を持つ粒子

の存在によって自然に起きるだろう。注目すべきことに、強い相互作用、電磁相互作用、弱い相互作用の「大統一理論」は現在3つの性質全てを予想しているので、我々の宇宙の物質-反物質の非対称性の説明を提供できるだろう。

$\tau = 1$ 秒で密度 $\rho \approx 5 \times 10^5 \text{gcm}^{-3}$ 温度 $T \approx 10^{10} \text{K}$ の初期の宇宙の歴史をかいつまんでみよう。これらの条件は通常の基準からは極端ではあるけれども、しっかりした予想をできるだけの十分低いエネルギーと密度領域ではある、この時点では、宇宙の物質はほとんどすべてニュートリノ、光子、電子、陽電子、中性子、陽子からなっていて熱平衡状態にある；より質量の大きい素粒子の存在割合は無視できる程度に温度は十分低い。この段階までに、ニュートリノの相互作用は十分小さくなり、他の物質と結合しなくなる。宇宙の歴史の残りでは、それらは受動的に低いエネルギーに赤方偏移するだけである。赤方偏移した熱分布 ($\omega \rightarrow \omega/a$) は、単純により低い温度 ($T \rightarrow T/a$) での熱分布なので、現在の宇宙は温度 $T \approx 2\text{K}$ のニュートリノの黒体分布に満たされているはずである。しかしこれらのニュートリノの検出は現在の感度をはるかに越えた課題である。

宇宙が冷えつつけるにつれて、陽子から中性子へあるいはその逆に転換する速度は急激に低下し、宇宙の膨張率よりずっと低くなる。結果として、 $\tau \sim 1.5$ 秒で、陽子に対する中性子の割合は約 $1/6$ に「凍結」する。(陽子は中性子に比べより豊富である。なぜなら陽子は中性子に比べ 1MeV 以上軽いので「凍結」が起きる前の熱分布では豊富なので) もちろん「凍結」という言葉は文字通りにとるべきではない。相互作用の「ターンオフ」は瞬間的ではないし、その上中性子-陽子の割合は中性子の崩壊でゆっくりと減少しつつける。

$\tau = 4$ 秒で、 $\rho = 3 \times 10^4 \text{gcm}^{-3}$ と $T \approx 5 \times 10^9 \text{K} \approx 0.5\text{MeV}$ で、ほぼ電子と陽電子の質量に当たる。この段階で電子と陽電子の平衡密度は急激に減少する；生成速度は消滅速度を下回り、この時点から少したつと陽電子はすべて消滅し、相対的に僅かな電子が残る。実質的に電子-陽電子対のエネルギーはすべて光子に変換され、ニュートリノの温度の ~ 1.4 倍の温度まで光子を加熱する。

$\tau \approx 3$ 分で温度が約 10^9K に下がったとき、核合成が始まり、 ${}^4\text{He}$ 原子核を生成する。実際は、熱平衡でこれらのバリオン密度では ${}^4\text{He}$ はもっと高い温度 ($\sim 3.5 \times 10^9 \text{K}$) で現れ始める。しかし重水素 (${}^2\text{H}$) がヘリウムを作る核反応で鍵となる役割を果たすのだが、平衡での ${}^2\text{H}$ の存在割合

は、温度が 10^9K より低下するまで、非常に低い。 ^4He 以上の元素の核合成はほとんど起こらない。というのは大きなクーロン障壁と、原子量 5 と 8 の安定原子核が無いからである。数分間に、「凍結」時にあって崩壊してなかったほとんど全ての中性子は ^4He に変換され、質量にして 25% の割合の ^4He になる。またずっと少ない割合だが ^2H , ^3He , ^7Li も生成される。他の元素は無視できる。 ^4He の割合は、主に「凍結」での中性子と陽子の比によるので、バリオン密度にそれほど敏感ではない。しかし、他の元素、特に ^2H はバリオン密度に非常に敏感である。相対的に低いバリオン密度では ^2H は質量の割合で 5×10^{-4} を越える。これにたいしバリオン密度が高いと – とくに宇宙を閉じさせるのに十分なほどの密度では – ^4He 生成反応の効率が増加し、 ^2H の割合は何桁も低くなる。

ヘリウムの宇宙の割合を観測するのは難しいが、25% は患側と一致するようである。宇宙でヘリウムの量がこれだけあることは、他の過程では説明ができない。とくに、星での核合成はヘリウムを数 % 生成するに過ぎないと推定されている。それで「ビッグバン核合成」を通してのヘリウム合成の予測は、理論の主要な成功の一つとみなすしかない。

核合成の期間のあと、もちろん宇宙は膨張と冷却を継続する。次の宇宙的に重要な出来事は温度が約 4000K に下がったときにおきる。これは、宇宙がまだ輻射優勢ならば $\tau \sim 4 \times 10^5$ 年でおきるが、もし宇宙が既に物質優勢になっていたならばやや早く起きただろう。この温度以下では、自由電子と陽子は結合して中性水素を形成した。実際、温度が 2000K にまで落ちるまでには、電離水素の割合はわずか $\sim 10^{-4}$ であった。再結合 (*recombination*) と呼ばれるこの出来事の結果、物質と輻射の相互作用は急激に低下する。というのは光子の荷電粒子に対する散乱断面積は、中性水素やヘリウムに対する散乱断面積よりずっと大きいからである。実際、再結合の後、光子はほとんど完全に物質と分離し、宇宙の進化の残りでは膨張とともに冷却するだけである。このようにして、現在の宇宙はビッグバンに由来する低温の黒体放射に満たされているはずである。それらの光子が最後に物質と相互作用したのは再結合の時である。

まさに温度 $T \approx 2.7\text{K}$ (マイクロ波の波長に対応) のそのような背景輻射が Penzias と Wilson によって見つけられた (1965)。この輻射の存在は他の方法では説明が困難で、宇宙の進化の前述のような描像の主要な確証を提供する。さらに、測定された輻射は非常に高い精度で等方的である。これは、少なくとも再結合時間では、宇宙はほとんど一様等方であったことの強固な証拠を提供する。

この時期の物質と輻射の分離は、重力の摂動の成長に主要な影響をして、銀河の形成につながった。再結合の直前では、輻射による圧力は $10^{17} M_{\odot}$ (典型的な銀河の質量 $\sim 10^{11} M_{\odot}$ よりはるかに大きい) より小さい質量の重力摂動の成長を妨げていた。しかし、再結合の後では、輻射の圧力は物質に何の影響もせず、重力不安定性は $\geq 10^5 M_{\odot}$ のすべての質量スケールで可能になった。このようにして、物質分布の不規則性は再結合の後に成長し始め、銀河や星団や星の形成につながった。

$\tau \sim 10^3$ 年から $\tau \sim 10^7$ 年のある時期に、通常物質が宇宙で優勢になった。(これが起きた正確な時期は不確定である。と言うのは現在の宇宙の物質密度には相当な不確定性があるからである。) 宇宙のダイナミクスは「輻射」から「ダスト」の解に移っていった。最後に 100 – 200 億年後に宇宙は現在の状態に到達した。

ということで、一般相対性理論は、宇宙の一様等方性の仮定と物質の内容について仮定とともに、我々の宇宙の歴史について、驚くほど成功した描像を生んできた。

我々の宇宙の未来の進化についてはどうか？ 未来の進化についてのもっとも重要な点は、我々の宇宙が「開いて」いるか「閉じて」いるか、つまり $k = 0, -1$ か $k = 1$ に対応するか？ 5章2節で議論したように、宇宙が開いているなら永遠に膨張するが、閉じているなら結局は再収縮する。現在の宇宙のダイナミクスを支配する基本的な方程式 (5.2.14), (5.2.15) をハッブル定数 \dot{a}/a と減速パラメーター q

$$q = -\ddot{a}a/a^2 \quad (5.4.6)$$

で表そう。現在の宇宙では $P \approx 0$ なので、

$$H^2 = 8\pi G\rho/3^k c^2/a^2 \quad (5.4.7)$$

$$q = \frac{4\pi G\rho}{3H^2} \quad (5.4.8)$$

を得る。

$$\Omega = 8\pi G\rho/3H^2 \quad (5.4.9)$$

で Ω を定義すると、 $q = \Omega/2$ となり、宇宙が閉じている ($k = 1$) のは $\Omega > 1$ 、つまり $\rho > \rho_c \equiv 3H^2/8\pi G$ の場合に限る。

第6章 シュワルツシルト解

6.1 シュワルツシルト解の導出

静的 (static) で球対称 (spherically symmetric) な物体外部の重力場を記述する Einstein 方程式の全ての解を探そう。つまり, Ricci テンソルが 0 で, 静的で球対称な 4 次元の Lorentz 符号の計量を全て求めたい。我々の最初の課題は, 「静的」と「球対称」という用語の意味をもっと正確に定義し, このクラスの時空間を解析するのに便利な座標系を選ぶことである。

時空間が定常 (*stationary*) と呼ばれるのは, 等長変換の 1 パラメーター群 ϕ_t が存在し, その軌道が時間的な曲線の場合である。この等長変換の群は, 時空間の「時間の並進対称性 (time translation symmetry)」を表す。同じことではあるが, 定常な時空間は, 時間的な Killing ベクトル場 ξ^a を持つ時空間である。定常な時空間に付け加えて, 等長変換の軌道に垂直な (空間的な) 超曲面 Σ が存在するならば, 静的 (*static*) な時空間と呼ばれる。Frobenius の定理から, これは時間的な Killing ベクトル場 ξ^a が

$$\xi_{[a} \nabla_b \xi_{c]} = 0 \quad (6.1.1)$$

を満足するという要請と等価である。

超曲面の直交性のこの余分な条件の意味は, 以下のような静的な時空間に対する便利な座標を導入することでよく分かるだろう。 Σ 上でどこでも $\xi^a \neq 0$ ならば, Σ 近傍で全ての点は Σ を通る ξ^a のある軌道上にある。 $\xi^a \neq 0$ ならば, Σ 上で勝手な座標 $\{x^\mu\}$ を選んで, したがって, これらの座標では, 計量の成分は

$$ds^2 = -V^2(x^1, x^2, x^3) dt^2 + \sum_{\mu, \nu=1}^3 h_{\mu\nu}(x^1, x^2, x^3) dx^\mu dx^\nu \quad (6.1.2)$$

という形をとる。ここで $V^2 = -\xi_a \xi^a$ であり, $dt dx^\mu$ という項が無いことは, ξ^a が Σ と直交していることを表している。

静的な計量の明示的な式 (6.1.2) から, $t \rightarrow -t$ で定義される微分同型は等長変換ということがわかる. このように, 全ての定常な時空間が持つ「時間並進」の対称性 $t \rightarrow t + \text{const.}$ に加えて, 静的な時空間は「時間反転」対称性をもつ. 物理的には, 時間並進不変な場合は, 回転運動が関係する場合は時間反転対称性ではなくなることがある. というのは時間反転は回転の向きを変えるので, 元の配置には戻らない. 例えば, 回転する流体球は時間に依存しない物質と速度の分布をもつが, 時間反転対称性をもたない. ここで考えていた場合では, 方程式 (6.1.1) が成立しないとすることは, ξ^a 近傍の軌道が互いに「よじれる (twist)」ことを意味する. これは, 方程式 (6.1.1) が時間反転対称性が存在する必要十分条件であることを説明する手助けになる.

ある時空間が球対称 (*spherically symmetric*) と呼ばれるのは, その等長変換群 (isometry group) が $SO(3)$ と同型な部分群を含んでいてその部分群の軌道が 2 次元球面である時である. $SO(3)$ の等長変換は物理的には回転と解釈されうるので, 球対称な時空間はその計量が回転で不変である.

$$r = (A/4\pi)^{1/2} \quad (6.1.3)$$

このようにして, 球座標系 (θ, ϕ) では, 2 次元球面上の計量は

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6.1.4)$$

という形をとる. 平らな 3 次元のユークリッド空間では, r は球の半径 (球の表面から中心への距離) の値となるであろう. しかし, 曲がった空間では球面は必ずしも中心を持たない (例えば, 多様体の構造は R^3 というより $R \times S^2$ でもよい); 仮に中心を持っていても, r は必ずしも中心との距離と関係するわけではない. しかし, 我々は r を球の「動径座標 (radial coordinate)」と呼ぶことにする.

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (6.1.5)$$

式 (6.1.5) の計量に対して便利な正規直交座標は

$$(e_0)_a = f^{1/2}(dt)_a \quad (6.1.6a)$$

$$(e_1)_a = h^{1/2}(dr)_a \quad (6.1.6b)$$

$$(e_2)_a = r(d\theta)_a \quad (6.1.6c)$$

$$(e_3)_a = r \sin \theta (d\phi)_a \quad (6.1.6d)$$

である．我々の座標系での通常微分 ∂_a を使うと

$$\partial_{[a}(e_0)_{b]} = \frac{1}{2}f^{-1/2}f'(dr)_{[a}(dt)_{b]}, \quad (6.1.7)$$

$$\partial_{[a}(e_1)_{b]} = 0, \quad (6.1.8)$$

$$\partial_{[a}(e_2)_{b]} = (dr)_{[a}(d\theta)_{b]}, \quad (6.1.9)$$

$$\partial_{[a}(e_3)_{b]} = \sin\theta(dr)_{[a}(d\phi)_{b]} + r\cos\theta(d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]}, \quad (6.1.10)$$

となる．ここで $f' = df/dr$ である．

$$\frac{1}{2}f^{-1/2}f'(dr)_{[a}(dt)_{b]} = h^{1/2}(dr)_{[a}\omega_{b]01} + r(d\theta)_{[a}\omega_{b]02} + r\sin\theta(d\phi)_{[a}\omega_{b]03}, \quad (6.1.11)$$

$$0 = f^{1/2}(dt)_{[a}\omega_{b]01} + r(d\theta)_{[a}\omega_{b]12} + r\sin\theta(d\phi)_{[a}\omega_{b]13}, \quad (6.1.12)$$

$$(dr)_{[a}(d\theta)_{b]} = -f^{1/2}(dt)_{[a}\omega_{b]20} + h^{1/2}(dr)_{[a}\omega_{b]21} + r\sin\theta(d\phi)_{[a}\omega_{b]23}, \quad (6.1.13)$$

$$\sin\theta(dr)_{[a}(d\phi)_{b]} + r\cos\theta(d\theta)_{[a}(d\phi)_{b]} = -f^{1/2}(dt)_{[a}\omega_{b]30} + h^{1/2}(dr)_{[a}\omega_{b]31} + r(d\theta)_{[a}\omega_{b]32}, \quad (6.1.14)$$