

基幹物理学 II

平成 28 年 5 月 31 日

目次

第 I 部	量子力学	7
第 1 章	導入	9
1.1	歴史的序論	9
1.1.1	波動 (電磁波) の粒子性	9
1.1.2	固体比熱	14
1.1.3	原子のスペクトル	15
1.1.4	粒子 (電子) の波動性	16
1.1.5	角運動量の量子化	17
1.2	応用、発展	17
第 2 章	統計力学	19
2.1	古典統計力学	19
2.1.1	エネルギー等分配則	20
2.1.2	単原子分子理想気体	21
2.1.3	2 原子分子理想気体	22
2.1.4	結晶	23
2.1.5	空洞放射の Rayleigh-Jeans の公式	25
2.2	量子統計力学	27
2.2.1	固体比熱の Einstein 模型	27
2.2.2	空洞放射の Planck の公式	29
2.2.3	固体比熱 Debye	30
第 3 章	前期量子論	31
3.1	原子の構造	31
3.1.1	アボガドロ数	31
3.1.2	電子	31
3.1.3	陽子	31
3.1.4	α 粒子	32

3.1.5	中性子	32
3.1.6	Zeeman 効果	32
3.1.7	α 線の散乱実験	33
3.2	作用変数、断熱不変量	33
3.3	Bohr の理論	34
3.3.1	Bohr の理論	34
3.3.2	量子化条件	35
3.3.3	例	35
3.4	de Broglie 波	37
3.4.1	de Broglie 波と量子化条件	38
3.4.2	粒子と波の二重性	38
3.5	その後の発展	38
 第 II 部 特殊相対論		41
 第 4 章 特殊相対論の基礎		43
4.1	歴史的序論	43
4.1.1	Newton 力学と Galilei の相対性原理	43
4.1.2	光学	45
4.1.3	光速度の測定	46
4.1.4	電磁気学	47
4.1.5	エーテル仮説	48
4.2	Michelson-Morley の実験	49
4.3	特殊 Lorentz 変換	51
4.4	特殊 Lorentz 変換からの結果	55
4.4.1	同時刻の相対性	55
4.4.2	Lorentz 収縮	57
4.4.3	走っている時計の遅れ	58
4.4.4	振動数、波長の変換則	58
4.4.5	速度の合成則	60
4.5	実験的検証	61
 第 5 章 テンソル算		63
5.1	一般の Lorentz 変換	63
5.2	スカラー、ベクトル、テンソル	66

5.2.1	スカラー	67
5.2.2	反変ベクトル	67
5.2.3	共変ベクトル	67
5.2.4	テンソル	68
5.3	テンソルの演算	69
5.3.1	和	69
5.3.2	スカラーとの積	70
5.3.3	テンソル積	70
5.3.4	テンソルの微分	70
5.3.5	縮約	70
5.3.6	内積	71
5.3.7	テンソルのタイプの変換	71
5.3.8	ベクトルの分類	72
5.3.9	光円錐	72
5.3.10	ダランベール演算子	73
第 6 章	相対論的力学	75
6.1	相対論的運動学	75
6.2	力学の基礎方程式の相対論的修正	77
6.3	エネルギーおよび運動量	78
6.3.1	静止エネルギー	79
6.3.2	4 元運動量と質量	80
6.3.3	実験事実	81
第 7 章	相対論的電磁気学	83
7.1	真空中の Maxwell の方程式	83
7.1.1	ポテンシャルと波動方程式	84
7.1.2	Lorentz 条件	84
7.1.3	ゲージ変換	85
7.1.4	ゲージ変換と Lorentz 条件	85
7.2	Maxwell の方程式の相対論的書き替え	86
7.2.1	電荷保存則	86
7.2.2	ポテンシャル	86
7.2.3	電磁場 $\vec{B}, \vec{E}$	87
7.2.4	まとめ	88
7.3	Maxwell の方程式の相対論的書き替え (II)	88

7.3.1	電磁場のエネルギー運動量テンソル	89
7.3.2	電磁場のエネルギー、運動量保存則	90

第I部
量子力学

第1章 導入

原子論はギリシアの昔からあったが、長い間仮説に留まっていた。19世紀末に、陰極線、X線、放射能などの発見があり、直接原子のかかわる現象が物理の対象になり始めた。

間接的ではあるが、19世紀後半に多数の粒子の集団を統計的に扱う統計力学が発展し、ミクロ(微視的)な粒子からマクロ(巨視的)な現象を理論的に記述できるようになり、マクロな現象を系統的に理解できるようになった。

しかし、研究が進むにつれ、古典力学と電磁気学では説明できない現象が見付かってきた。これらの問題を解決するのに誕生したのが量子力学である。

今や量子力学は、素粒子論や物性論など物理学を支える土台となり、また化学での分子構造、反応性など理論的に裏付ける量子化学となり、さらに半導体、超伝導、レーザー、MRIや原子時計などいたるところに応用されるようになっている。

1.1 歴史的序論

量子力学は、次のような実験事実を説明するために建設された。

1.1.1 波動(電磁波)の粒子性

黒体放射

プランク (Planck¹) による黒体放射の分析 (1900) から、

$$E = nh\nu \quad (1.1)$$

¹Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947) ドイツの物理学者、1918年ノーベル物理学賞

(E はエネルギー、 ν は振動数、 n は0 又は正の整数、 h はプランク定数)、つまり電磁場のエネルギーの量子化 (光子) が起こることが示された。ここで h は作用の次元 ($[\text{質量}] \times [\text{長さ}]^2 \times [\text{時間}]^{-1} = [\text{エネルギー}] \times [\text{時間}] = [\text{長さ}] \times [\text{運動量}]$) をもち、

$$h = 6.626068 \times 10^{-34} J \cdot s \quad (1.2)$$

である。

黒体：外部から入射する電磁波 (光、赤外線、紫外線、マイクロ波など) を、全波長にわたって完全に吸収し、または放出できる物体。

空洞放射と等価である。

熱力学によると、黒体から放射される電磁波の振動数と強度の関係は温度のみによってきまる。

1. Stefan-Boltzmann の法則

実験 J. Stefan (1879)

理論 L. Boltzmann² (1884)

黒体の表面から、単位面積、単位時間あたりに放出される電磁波のエネルギーが温度の4乗に比例するという法則

$$j = \sigma T^4 \quad (1.3)$$

ここで σ は Stefan-Boltzmann 定数

$$5.670400 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$$

である。

2. Wien の変位則 (1893)

W. Wien³ が熱力学的関係式より導いた。

黒体放射スペクトルが最大となる波長 λ_{max} は

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T} \quad (1.4)$$

となる。

²Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906) オーストリアの物理学者

³Wilhelm Wien (1864-1928) ドイツの物理学者、1911 年ノーベル物理学賞

3. Wien の公式 (1896)

Wien はさらに粒子的な扱いと 断熱不変量 (後で説明する) を統計力学に扱って

$$U(\nu)d\nu = \frac{8\pi k_B \beta}{c^3} \exp(-\beta\nu/T) \nu^3 d\nu \quad (1.5)$$

を導いた。ここで k_B は Boltzmann 定数

$$k_B = 1.3806505 \times 10^{-23} J/K$$

で、定数 β は実験と合うように決める。

短波長では黒体放射をうまく説明するが、長波長側では実験とあわない。

また、理論的に見ても電磁気学とは整合性が取れていない。

4. Rayleigh-Jeans の公式 (1900,1905)

Rayleigh⁴ は統計力学のエネルギー等分配則を電磁場に応用して

$$U(\nu)d\nu = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (1.6)$$

という公式を得た。

長波長では黒体放射をうまく説明するが、短波長側では発散がおき、実験とあわない。

電磁波の波動的な性質はきちんと取り入れている。

5. Planck の公式

Planck は Wien の公式と Rayleigh-Jeans の公式の補間式をさがし、

$$U(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \nu^3 d\nu \quad (1.7)$$

と言う形を見出した (1900 年)。

これは全波長で黒体放射を定量的にうまく説明する。

また電磁気学とも矛盾しない。

⁴John William Strutt Rayleigh (1842-1919) イギリスの物理学者、1904 年ノーベル物理学賞

6. 電磁気と熱力学的考察

Planck は Planck の公式にたどり着く前に電磁気と熱力学を組み合わせて (ただし、等分配則ではなく、後で述べる断熱不変量を基本にして、)

$$U(\nu)d\nu = \frac{8\pi}{c^3} F\left(\frac{\nu}{T}\right) \nu^3 d\nu \quad (1.8)$$

という公式を古典的に導いていた。ただし、 F の関数形は古典的には決まらない。

Wien の公式は

$$F(x) = k_B \beta \exp(-\beta x)$$

にあたり、Planck の公式は

$$F(x) = \frac{k_B \beta}{\exp(\beta x) - 1}$$

で、 $h = k_B \beta$ としたものにあたる。

7. Planck は Planck の公式の発見後、その意味を徹底的に考え、全ての物体が連続でなく原子の集合から成り立っているのと同様に、(電磁場の) エネルギーも連続量ではなくある単位量の自然数倍になっているのではないかという結論にたどり着いた。このエネルギーの素量を彼はエネルギー量子と名付けた。

8. Rayleigh-Jeans の公式は波動的な立場とエネルギー等分配則にもとづき、Wien の公式は粒子的な立場と断熱不変量に基づく。

Planck の公式は波動と粒子の2重性を反映したもので、かつ断熱不変量に基づく。これはまさに量子力学の本質をついた洞察である。

光電効果

光電効果からも電磁波のエネルギーの量子化 (Einstein ⁵, 1905) がでてくる。

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W \quad (1.9)$$

光電効果: 可視光や紫外線を金属などに当てると表面から電子が飛び出す現象。

⁵Albert Einstein (1879-1955) ドイツ生まれの理論物理学者、1921 年ノーベル物理学賞

1. Hertz⁶ (1887)

電磁波の実験中に発見した．紫外線により放電が起こりやすくなる．

2. Hallwachs (1888)

Hallwachs⁷ は光電効果で出てくるものが負の電荷であることを確認した．負に帯電させた亜鉛の金属板に紫外線を当てると電荷が急速に失われるが、正に帯電させたものでは電荷がなかなか失われないことから推論した．

3. J.J.Thomson⁸ (1899)

光電効果で出てくる粒子の比電荷 (e/m) を測定、電子であることを確認した．

4. Lenard の実験 (1902)

Lenard⁹ は明るい炭素アーク灯を用い、色を変えての光電効果の実験をした。

- (a) 飛び出す電子 1 個あたりのエネルギーは、光の強度にはよらない．
- (b) 光の強度を大きくすると、単位時間に飛び出る電子の個数が多くなる．
- (c) 飛び出す電子 1 個あたりの運動エネルギーは、光の波長に関係し、波長が短い程 (振動数が高いほど) エネルギーの高い電子が飛び出す．

ただ、光源の単色性が不十分なことと、真空中の金属表面が若干酸化されているため (当時の真空技術の限界)、実験結果の再現性および定量性は不十分だった．

5. Einstein の理論 (1905)

⁶Heinrich Hertz (1857-1694) ドイツの科学者 (物理、電気技術)

⁷Wilhelm Ludwig Franz Hallwachs (1859-1922) ドイツの物理学者．

⁸Joseph John Thomson (1856-1940) イギリスの物理学者。1906 年ノーベル賞受賞

⁹Philipp Eduard Anton von Lénárd (1862-1947) ハンガリーの物理学者、1905 年ノーベル物理学賞

6. Millikan の実験 (1916)

Millikan¹⁰ は水銀の複数のスペクトル線を用いて単色性のよい光源を使い、真空中の金属表面を清浄に保つための工夫をして光電効果の実験を行った。

元々の動機は Einstein の光量子仮説を否定するつもりだったが、逆に Einstein の理論を、実験で定量的に示した。彼の実験から (1.9) を使って求められた h は、黒体放射からの Planck 定数 h と良く一致した。

コンプトン効果

運動量についても、Einstein は

$$p = h/\lambda \quad (1.10)$$

(p は運動量、 λ は波長) と、電磁場が粒子のようにふるまうと予想し、Compton¹¹ は X 線と電子の散乱による散乱 X 線の波長が伸びるコンプトン (Compton) 効果 (1923) により実証した。

電磁場の粒子としての側面を光量子、または光子と呼ぼう。最近では、CCD などを使った実験でも電磁波の粒子性が見られる。

反跳電子

Wilson, Bothe

1.1.2 固体比熱

1. Dulong¹² -Petit¹³ の法則 (1819)

固体元素の定積モル比熱が常温ではほぼ一定。

$$C_V = 3R \quad (1.11)$$

¹⁰Robert Andrews Millikan (1868-1953) アメリカの物理学者、1923 年ノーベル物理学賞

¹¹Arthur Holly Compton(1892-1962) アメリカの物理学者、1927 年ノーベル賞受賞

¹²Pierre Louis Dulong (1785-1838) フランスの科学者 (物理、化学)

¹³Alexis Thérèse Petit (1791-1820) フランスの物理学者

エネルギー等分配則より。

低温ではこれからずれ、0 に向かう。

2. Einstein モデル (1907)

固体振動を独立に同一の振動数で単振動する調和振動子で表したものの、古典論では Dulong-Petit の法則のままだが、量子効果を取入れ、振動の量子化をすると低温での比熱の現象が定性的に説明できる。

3. Debye¹⁴ モデル (1912)

Einstein モデルの改良、定量的にも良くあう。

1.1.3 原子のスペクトル

気体放電管などから、原子から出てくる光を分光器などで見ると特徴的なスペクトルを示す。

水素原子のスペクトル

水素原子は 1 個の陽子の回りを 1 個の電子が回っていて、もっとも簡単な構造を持つ。対応して、水素原子の出す光のスペクトルも単純な構造を持つ。

水素原子の出す光のスペクトル線は複数あり、一連の系列をなす。

最初に見付かった水素原子の光のスペクトル線の関係は Balmer¹⁵ により発見された (1885)。彼は可視部の 4 本のスペクトル線の波長が

$$\frac{9}{5}h, \frac{16}{12}h, \frac{25}{21}h, \frac{36}{32}h, \quad h = 3.6456 \times 10^{-7}m$$

と表されることを発見し、

$$\lambda = \frac{n^2}{n^2 - 4}h \quad n = 3, 4, 5, 6, \quad (1.12)$$

という公式にまとめられることに気づいた。

¹⁴Peter Joseph William Debye (1884-1966) オランダの物理学者、物理化学者、1936 年ノーベル化学賞

¹⁵Johann Jakob Balmer (1825-1898) スイスの科学者 (物理学、数学)

Rydberg¹⁶ はアルカリ金属原子のスペクトルの研究から、スペクトル線の系列について

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_{\infty}} - \frac{R}{(n+b)^2} \quad n: \text{正の整数} \quad (1.13)$$

と整理した (1888)。ここで、 λ_{∞} は系列端の波長である。Rydberg の公式中の R (Rydberg 定数) は原子の種類によらず、

$$R = 1.09737 \times 10^7 m^{-1}$$

であり、Balmer の定数との関係は $R = 4/h$ である。これにたいし、 b は原子の種類ごとにことなり、また系列ごとに異なる値をとるが、一つ系列内ではほぼ同じ値をとる。

Rydberg はさらに研究を進め、いろいろなスペクトル系列の系列端の規則性を見出した。つまり

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{(m+a)^2} - \frac{1}{(n+b)^2} \right) \quad n, m: \text{正の整数} \quad (1.14)$$

となる。これを Rydberg の公式 (1890) という。

水素原子の場合は Rydberg の公式で $a = b = 0$ にあたり、

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (1.15)$$

とまとめられ、Balmer 系列は $m = 2$ の場合にあたる。

その後、水素原子のスペクトルをもっと広い範囲で調べると紫外線では $m = 1$ に属する Lyman¹⁷ 系列 (1906)、赤外線では $m = 3$ に属する Paschen 系列 (1908), C. H. F. Paschen) $m = 4$ に属する Blackett 系列 (1922) が見付かった。

1.1.4 粒子 (電子) の波動性

逆に電子は波動としても振舞う。ド・ブロイ (de Broglie) 波 (1923) と、デヴィッソン・ガーマー (Davisson, Germer) の実験 (Ni 単結晶表面の回

¹⁶Johannes Robert Rydberg (1854-1919) スウェーデンの物理学者

¹⁷Theodore Lyman (1874-1954) アメリカの物理学者

折)(1927)、菊池の実験(雲母による回折)(1928)。これらから、運動量 p の電子は、

$$k(=\frac{2\pi}{\lambda})=\frac{p}{\hbar} \quad (1.16)$$

という波数 k (もしくは波長 λ) の波として振舞う。最近では電子線ホログラフィー(外村)。

このことは、水素原子のスペクトル構造とも関係する。

中性子回折の実験でも粒子の波動性が示されている。特に、中性子線回折計(Bonse, 1974)で、粒子の波動性のみならず、スピンの回転対称性、スピノール、量子力学と(一般相対性理論の)等価原理などが調べられている。

1.1.5 角運動量の量子化

軌道角運動量の量子化に関してはゼーマン(Zeeman)効果(1896)(原子のスペクトルの磁場中での分裂)、

スピン角運動量の量子化に関してはシュテルン・ゲルラッハ(Stern, Gerlach)の実験(1922)。

1.2 応用、発展

1. 素粒子物理学への場の量子論。
2. 素励起: 物性物理での様々な素励起(フォノン、マグノン、ホール、プラズモン、エキシトンなど)による多彩な現象の説明。半導体などへの応用。
3. コヒーレント状態: 量子論はミクロな現象ばかりでなく、マクロにも観測される。例として、超伝導やレーザーでは巨視的に位相の揃ったコヒーレント状態が現れる。
4. NMR, MRI: 角運動量の量子化を利用した計測法。

と言ったものがある。

第2章 統計力学

2.1 古典統計力学

統計力学では、物体の熱、温度、圧力などの熱力学的な量を、その物体を作り上げている多数の分子の不規則で複雑な運動によるものだととして、分子運動の力学的量の統計的平均から熱力学的量を導いている。

ある温度の熱浴の中に一つの物体が浸かっている、熱平衡の状態とする。つまり、物体が熱浴の温度と同じ温度になっていて、平均では双方に熱エネルギーの出入りがない状態である。しかし、物体の原子の運動まで細かく見ると、原子は不規則に運動していてある時は壁を通して熱浴からエネルギーを得たり、別の時には熱浴にエネルギーを与えていたりしている。

この物体を原子的にみると、それは非常に複雑で自由度の大きい力学系である。この力学系の状態は、自由度の数だけの個数の一般化座標 $q_1, q_2, \dots, q_f$ と、それに対応する一般化運動量 $p_1, p_2, \dots, p_f$ で表される (f は自由度の数)。これらの座標と運動量は運動方程式にしたがって時間とともに非常に複雑に変化する。系のエネルギーはこれらの $\{q\}$ や $\{p\}$ の関数として与えられ、時間とともに複雑に変化する。これらの座標や運動量、エネルギーの時間変化は非常に複雑であるので、個々の場合に理論的に求めるのは極めて難しく、事実上不可能である。

しかし、この変化を統計的に議論することはそこまでは難しくない。すなわちその力学系が時間的経過をたどるうちに、座標や運動量が、ある値をしばしばとるけれども別の値はなかなかとらないという意味で、座標や運動量の値の確率を議論することができる。 $\{q\}$ や $\{p\}$ の関数としての系のエネルギーを $E(q_1, q_2, \dots, q_f; p_1, p_2, \dots, p_f)$ と書くことにする。すると運動経路をたどるうちに第1の座標が q_1 と $q_1 + dq_1$ との間の値をとり、第2の座標が q_2 と $q_2 + dq_2$ との間の値をとり、 $\dots$ 、第 f の座標が q_f と $q_f + dq_f$ との間の値をとり、かつ第1の運動量が p_1 と $p_1 + dp_1$ との間の値をとり、 $\dots$ 、第 f の運動量が p_f と $p_f + dp_f$ との間の値をとる

ことの確率は,

$$\begin{aligned} & P(q_1, q_2, \dots, q_f; p_1, p_2, \dots, p_f) dq_1 dq_2 \dots dq_f dp_1 dp_2 \dots dp_f \\ &= A \exp \left(-\frac{1}{k_B T} E(q_1, q_2, \dots, q_f; p_1, p_2, \dots, p_f) \right) dq_1 dq_2 \dots dq_f dp_1 dp_2 \dots dp_f \end{aligned} \quad (2.1)$$

で与えられることを統計力学的に示すことができる(この証明には, エルゴード仮説, Liouville の定理, エントロピーの相加性などを用いる). ここで A は, 全確率を 1 にするための規格化の因子で

$$A^{-1} = \int \int \dots \int \exp \left(-\frac{1}{k_B T} E(q_1, \dots, q_f; p_1, \dots, p_f) \right) dq_1 \dots dq_f dp_1 \dots dp_f \quad (2.2)$$

で定義される. ここで T はその物体の浸かっている熱浴の温度である. また, k_B はボルツマン定数と呼ばれ, その値は

$$k_B = 1.3806488(13) \times 10^{-23} \text{JK}^{-1}$$

である.

2.1.1 エネルギー等分配則

系の全運動のエネルギーが各自由度ごとの運動エネルギーを加え合わせた形であらわされ, かつ各々の自由度に属する運動エネルギーがその自由度に属する速度 (または運動量) の二乗に比例する場合, その力学系が温度 T の熱浴に浸かっていると各自由度ごとの運動エネルギーの平均値は $k_B T/2$ で与えられる. これはエネルギー等分配の法則とよばれる.

エネルギー等分配の法則を証明してみよう. 仮定により系の運動エネルギーは次の形をしている.

$$E_{\text{kin}} = \alpha_1 p_1^2 + \dots + \alpha_s p_s^2 + \dots + \alpha_f p_f^2 \quad (2.3)$$

一般項 $\alpha_s p_s^2$ は s 番目の自由度の運動エネルギーで, α_s は定数である (もっと一般的には座標の負にならない関数であってもよい). s 番目の自由度

の運動エネルギー $\alpha_s p_s^2$ の平均値は

$$\begin{aligned}\langle \alpha_s p_s^2 \rangle &= A \int \int \cdots \int \alpha_s p_s^2 \exp \left(-\frac{1}{k_B T} E(q_1, \cdots, q_f; p_1, \cdots, p_f) \right) dq_1 \cdots dq_f dp_1 \cdots dp_f \\ &= A \int \int \cdots \int \alpha_s p_s^2 \exp \left(-\frac{1}{k_B T} \left(\sum_{s=1}^f \alpha_s p_s^2 + V \right) \right) dq_1 \cdots dq_f dp_1 \cdots dp_f\end{aligned}\quad (2.4)$$

である． V はポテンシャルエネルギーで，座標 $\{q\}$ だけの関数とする．この平均値を求めるため，まず

$$I = \int \alpha_s p_s^2 \exp \left(-\frac{1}{k_B T} \alpha_s p_s^2 \right) dp_s \quad (2.5)$$

を計算する．これは

$$\begin{aligned}I &= -\frac{k_B T}{2} \int p_s \frac{\partial}{\partial p_s} \exp \left(-\frac{1}{k_B T} \alpha_s p_s^2 \right) dp_s \\ &= \frac{k_B T}{2} \int \exp \left(-\frac{1}{k_B T} \alpha_s p_s^2 \right) dp_s\end{aligned}\quad (2.6)$$

となる（部分積分を使って式変形している）．したがって

$$\langle \alpha_s p_s^2 \rangle = A \frac{k_B T}{2} \int \int \cdots \int \exp \left(-\frac{1}{k_B T} \left(\sum_{s=1}^f \alpha_s p_s^2 + V \right) \right) dq_1 \cdots dq_f dp_1 \cdots dp_f \quad (2.7)$$

となる．規格化因子 A の定義 (2.2) から直ちに

$$\langle \alpha_s p_s^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T \quad (2.8)$$

となる．(2.8) は 1 から f の間の任意の s について成立するので，エネルギー等分配の法則が証明できた．

2.1.2 単原子分子理想気体

ヘリウム，ネオン，アルゴン，クリプトン，キセノンなど1つの原子からなる分子気体を，単原子分子気体とよぶ．1モルの単原子分子気体が温度 T の熱浴に浸かっているとすると，このガスが十分希薄な場合には，分

子の間の相互作用を無視してよい(理想気体)．ガスのエネルギーとして，運動エネルギーのみを考えると

$$E = E_{\text{kin}} = \sum_{i=1}^{N_A} \frac{1}{2m} (p_{ix}^2 + p_{iy}^2 + p_{iz}^2) \quad (2.9)$$

ただし， m は分子の質量， p_{ix}, p_{iy}, p_{iz} はそれぞれ i 番目の分子の運動量の x, y 及び z 成分である． N_A は1モルの分子の総数(アボガドロ定数)で，

$$N_A = 6.02214129(27) \times 10^{23} \text{mol}^{-1} \quad (2.10)$$

である．

(2.9) は (2.3) の形をしているので，エネルギー等分配の法則が成り立つ．したがって各自由度ごとに分配された運動エネルギーの平均値は

$$\frac{1}{2m} \langle p_{ix}^2 \rangle = \frac{1}{2m} \langle p_{iy}^2 \rangle = \frac{1}{2m} \langle p_{iz}^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T \quad (2.11)$$

となる．したがってガス分子1個あたりのエネルギーの平均値は

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{1}{2m} (\langle p_{ix}^2 \rangle + \langle p_{iy}^2 \rangle + \langle p_{iz}^2 \rangle) = \frac{3}{2} k_B T \quad (2.12)$$

1モルのガスの全体のエネルギーは

$$U = \frac{3}{2} N_A k_B T \quad (2.13)$$

$R = N_A k_B$ とすると (R は気体定数と呼ばれる)，気体1モルあたりの内部エネルギーは

$$U = \frac{3}{2} RT \quad (2.14)$$

定積比熱は

$$C_V = \frac{3}{2} R \quad (2.15)$$

となる．

2.1.3 2原子分子理想気体

水素，窒素，酸素，一酸化炭素，塩化水素などのガスの分子は2つの原子が結びついている．この種のガス分子は，単原子分子気体のような

並進運動の3つの自由度の他に，分子軸（二つの原子を結ぶ軸）に直角な2軸のまわりに慣性モーメントを持ち，2つの回転の自由度がある．

分子の運動状態は，重心の座標 x, y, z と分子軸の方向を決める角 θ と ϕ と，これら5つの座標に対応する運動量 $p_x, p_y, p_z, p_\theta, p_\phi$ によって決まる．分子の慣性モーメントを I とすると，エネルギーは

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{1}{2I} \left(p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right) \quad (2.16)$$

であるので，(2.3) の形をしている．

したがって等分配の法則が成立し，1個の分子の平均エネルギーとして

$$\begin{aligned} \langle E \rangle &= \frac{1}{2m}(\langle p_x^2 \rangle + \langle p_y^2 \rangle + \langle p_z^2 \rangle) + \frac{1}{2I} \left(\langle p_\theta^2 \rangle + \left\langle \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} \right\rangle \right) \\ &= \frac{5}{2} k_B T \end{aligned} \quad (2.17)$$

が得られる．これから，

$$U = \frac{5}{2} RT \quad (2.18)$$

および

$$C_V = \frac{5}{2} R \quad (2.19)$$

が出てくる．

2.1.4 結晶

結晶の比熱もエネルギー等分配則を用いて求めることができる．結晶を作る原子は規則正しく並んで空間格子を作っている．絶対温度0度では空間格子上で原子は静止しているが，有限温度では原子は平衡の位置のまわりで不規則に振動している．

この空間格子の任意の振動は，時間的に正弦振動するいくつかの固有振動を重ね合わせて表すことができる．つまり熱振動も，弾性体としての基本振動を適当な位相と振幅で重ね合わせて表現できる．またこの振動の全エネルギーは，この時重ね合わさっている個々の固有振動のエネルギーの和で表される．

今， s 番目の固有振動を記述する座標を q_s ，対応する運動量を p_s とする．そのエネルギーは一つの調和振動子の形

$$E_s = a_s q_s^2 + b_s p_s^2 \quad (2.20)$$

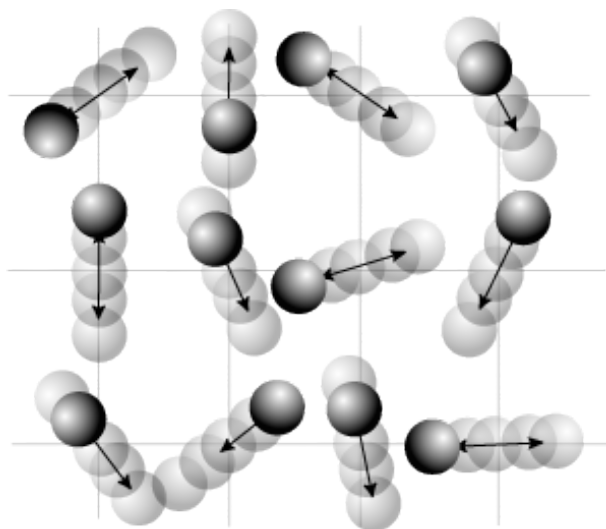


図 2.1: 結晶中の原子の熱振動

をしている．ここで第1項は位置エネルギー，第2項は運動エネルギーである．

この調和振動子の力学系にもエネルギー等分配則が当てはまるので，

$$\langle b_s p_s^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T \quad (2.21)$$

である．ただし，理想気体の場合とは異なり，結晶振動では全エネルギーに運動エネルギーだけでなく位置エネルギーも含まれる．しかし，調和振動子系では一般に運動エネルギーの時間平均と位置エネルギーの時間平均が等しいので，

$$\langle E_s \rangle = \langle a_s q_s^2 \rangle + \langle b_s p_s^2 \rangle = k_B T \quad (2.22)$$

を得る．

1つの固有振動に対する平均エネルギーが得られたので，これを結晶の全ての固有振動について加えると，結晶のエネルギーが求められる．1モルの結晶の固有振動の個数を f とすると

$$\langle E \rangle = f k_B T \quad (2.23)$$

である．

1モルの結晶中には N_A 個の原子が含まれる．この系の固有振動数の個数は，自由度の個数に等しく，したがって

$$f = 3N_A - 6 \quad (2.24)$$

である． $3N_A$ は N_A 個の原子の全体の自由度の個数である．それから 6 を引いたのは，結晶全体の重心の並進運動の自由度が 3，結晶全体の剛体としての回転の自由度が 3 で，これらは振動とは無関係だからである．ただし $N \gg 1$ なので，

$$f = 3N_A \quad (2.25)$$

と置いてよい．したがって，結晶 1 モルの持つ内部エネルギーは

$$U = 3N_A k_B T = 3RT \quad (2.26)$$

となり，比熱は

$$C = 3R \quad (2.27)$$

となる．

2.1.5 空洞放射の Rayleigh-Jeans の公式

電磁波の空洞放射の熱エネルギーについて，エネルギー等分配則の立場から考察しよう．電磁波を記述する Maxwell の方程式は，形式的には弾性体と同じ数式を満たすので，固体比熱と同様な考察が可能はずである．ただし，結晶振動の場合には振動の自由度は $f = 3N_A$ であったのに対して，電磁波の場合は有限体積でも固有振動の個数は無限大である．これは電磁波の場合にはいくらでも短波長の振動が可能であるのに対して，結晶振動の場合は原子の格子間隔より短い波長の振動はありえないからである．したがって電磁波の空洞放射について，エネルギー等分配則を単純に当てはめると，全エネルギーは発散する．

しかし，全エネルギーではなく，個々の振動数に割り当てられるエネルギー密度を計算する事で，電磁波の空洞放射のスペクトルを議論することはできる．振動数 ν と $\nu + d\nu$ の間にある自由度の個数を $Z(\nu)d\nu$ とする．簡単のため，空洞は $L \times L \times L$ の立方体とする．3次元の問題を扱うために，まず 1次元の問題を考察する．

電磁場の振動を扱う前に，弦の振動を考察する．つまり両端を固定した長さ L の弦の固有振動で，振動数の値が ν から $\nu + d\nu$ の間にあるものは何個かを考察する．長さ L の弦に起こりうる固有振動の波長は $2L, 2L/2, 2L/3, \dots, 2L/s, \dots$ である．この弦の上を弾性波が伝わる速さを c とすると，固有振動の振動数は

$$\nu_s = s \frac{c}{2L}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (2.28)$$

で与えられる．弦の固有振動の振動数は， $\Delta = c/2L$ の間隔をもって等間隔に並んでいる．すると ν と $\nu + d\nu$ の振動数の範囲内には

$$Z(\nu)d\nu = \frac{d\nu}{\Delta} = \frac{2L}{c}d\nu \quad (2.29)$$

の個数の固有振動数がはさまれている．

次に，3次元振動は3つの正の整数 s_x, s_y, s_z の組で表すことができる．すると振動数は (2.28) の代わりに

$$\nu_{s_x, s_y, s_z} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} \frac{c}{2L} \quad (2.30)$$

で与えられる．3次元の固有振動を表すには3次元空間を用いるのが良い．3次元空間の3つの直交座標軸を x, y, z 軸として，

$$x = \frac{c}{2L}s_x, \quad y = \frac{c}{2L}s_y, \quad z = \frac{c}{2L}s_z \quad (2.31)$$

と言う点を考える． s_x, s_y, s_z は整数なので，これらの点は $c^3/(2L)^3$ の体積の空間碁盤目の上に来ることになる．原点からその点までの距離を求めると

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} \frac{c}{2L} \quad (2.32)$$

となる．この距離 r が，振動数 ν_{s_x, s_y, s_z} を与えることになる．

ν と $\nu + d\nu$ の間の振動数をもつ固有振動の個数を求めるには，上の xyz 空間に半径 ν と半径 $\nu + d\nu$ の2つの球を描き（ただし s_x, s_y, s_z は正なので第1象限のみ考えるので，球の $1/8$ ），その2つの球ではさまれた空間に含まれる碁盤目の個数が， $Z(\nu)d\nu$ である．1つの碁盤目の体積は $\Delta^3 = c^3/(2L)^3$ であり，この球にはさまれた空間の体積は $4\pi\nu^2 d\nu/8$ であるので，求める量は

$$Z(\nu)d\nu = \frac{\pi\nu^2 d\nu}{2\Delta^3} = \frac{4\pi L^3}{c^3}\nu^2 d\nu \quad (2.33)$$

である．

以上の議論を電磁波に当てはめるにはまず波動の速度 c として光速を用いなければならない．この他に，電磁波は横波で2つの偏波をもつ．したがって電磁波の場合の $Z(\nu)$ は (2.33) の2倍である．

$$Z(\nu)d\nu = \frac{8\pi L^3}{c^3}\nu^2 d\nu \quad (2.34)$$

エネルギー等分配則からは，おのこの固有振動に $k_B T$ ずつのエネルギーが分配されているので， ν と $\nu + d\nu$ の間の振動数の電磁波には

$$E(\nu)d\nu = Z(\nu)k_B T d\nu = \frac{8\pi L^3}{c^3} k_B T \nu^2 d\nu \quad (2.35)$$

のエネルギーが含まれている．したがって空洞の単位体積あたりの電磁波のエネルギーのスペクトル分布は

$$U(\nu) = \frac{8\pi k_B T}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (2.36)$$

となる．これが *Rayleigh-Jeans* の公式である．

2.2 量子統計力学

量子系の場合は，座標と運動量が交換しない．量子系の統計力学の確率密度は

$$A \exp(-E_n/k_B T) \quad (2.37)$$

規格化因子は

$$A^{-1} = \sum_n \exp(-E_n/k_B T) \quad (2.38)$$

である．

2.2.1 固体比熱の Einstein 模型

固体結晶が N 個の同種原子からなっているとし，原子配列は空間の 3 方向に同等とする．この結晶で，各原子がおのこの力学的平衡の位置のまわりで独立に振動するとすると，3 方向それぞれの振動は同等となる．この時結晶は $3N$ 個の同じ固有振動数 ν を持つ振動子の系とみなすことができる．なお，式 (2.20) で表される調和振動子の場合，固有振動数は $\nu_s = \sqrt{a_s b_s}/\pi$ である．

調和振動子 1 個当たりのエネルギーは，量子力学から

$$\epsilon_n = nh\nu \quad (n = 0, 1, 2 \dots) \quad (2.39)$$

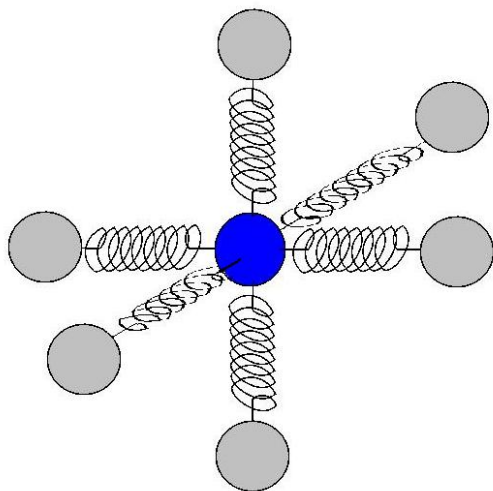


図 2.2: 結晶の熱振動の Einstein モデル

すると振動子 1 個あたりの平均エネルギーは

$$\begin{aligned}
 \langle \epsilon \rangle &= A \sum_{n=0}^{\infty} n h \nu \exp(-n h \nu / k_B T) \quad (1/k_B T = x \text{ とおくと}) \\
 &= -A \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{\infty} (\exp(-h \nu x))^n \\
 &= -A \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{1 - \exp(-h \nu x)} \\
 &= A \frac{h \nu \exp(-h \nu x)}{(1 - \exp(-h \nu x))^2} \\
 &= A \frac{h \nu \exp(-h \nu / k_B T)}{(1 - \exp(-h \nu / k_B T))^2} \tag{2.40}
 \end{aligned}$$

以上の式変形には等比級数の和の公式

$$\sum_{k=0}^n a r^k = \frac{a(1 - r^{n+1})}{1 - r} \quad (r \neq 1)$$

を使った．ところで，

$$1/A = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n h \nu / k_B T) = \frac{1}{1 - \exp(-h \nu / k_B T)} \tag{2.41}$$

したがって ,

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{h\nu \exp(-h\nu/k_B T)}{1 - \exp(-h\nu/k_B T)} = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (2.42)$$

したがって , 1 モルの結晶全体での平均エネルギーは

$$\langle E \rangle = 3N_A \langle \epsilon \rangle = \frac{3N_A h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \quad (2.43)$$

1. 高温極限 $T \rightarrow \infty$

この場合は $\exp(h\nu/k_B T) \approx 1 + h\nu/k_B T$ より ,

$$\langle E \rangle \approx \frac{3N_A h\nu}{(1 + h\nu/k_B T) - 1} = 3N_A k_B T \quad (2.44)$$

これは Dulong-Petit の法則と一致している .

2. 低温極限 $T \rightarrow 0$

この場合は $\exp(h\nu/k_B T) \gg 1$ より

$$\langle E \rangle \approx \frac{3N_A h\nu}{\exp(h\nu/k_B T)} = 3N_A h\nu \exp(-h\nu/k_B T) \rightarrow 0 \quad (2.45)$$

定性的には固体比熱の実験結果と一致する . 定量的には , 現実の結晶の比熱は低温では温度のべき乗で振る舞う (Debye 模型) ので Einstein 模型とは食い違っている .

2.2.2 空洞放射の Planck の公式

電磁波の空洞放射の熱エネルギーについて , 統計力学と量子力学から考察してみよう . 電磁場の場合 , 振動数 ν と $\nu + d\nu$ の間の固有振動のモードの数は (2.34) から

$$Z(\nu)d\nu = \frac{8\pi L^3}{c^3} \nu^2 d\nu \quad (2.46)$$

である .

独立な量子力学的な調和振動子の系では、おのおのの固有振動には、平均して (2.42) のエネルギーが分配されているので、 ν と $\nu + d\nu$ の間の振動数の電磁波には

$$E(\nu)d\nu = \frac{h\nu}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} Z(\nu)d\nu \quad (2.47)$$

のエネルギーが含まれている。したがって空洞の単位体積あたりの電磁波のエネルギーのスペクトル分布は

$$U(\nu)d\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{1}{\exp(h\nu/k_B T) - 1} \nu^3 d\nu \quad (2.48)$$

となる。これが *Planck* の公式である。

2.2.3 固体比熱 Debye

第3章 前期量子論

3.1 原子の構造

3.1.1 アボガドロ数

Loschmidt¹ は粘性係数の測定から気体分子の平均自由行程を求め、同じ物質の液体と気体の密度の比較から分子の体積を求めた (1865) . これによりアボガドロ数 (Avogadro constant) が求められる .

ブラウン運動からアボガドロ数を測定することもできる。これは A. Einstein が理論的に予想し (1905)、実験は J. Perrin² が行った (1908)。

アボガドロ数から原子の質量がわかる .

3.1.2 電子

陰極線：陰極線管などの放電現象に見られる電子の流れ .

J. J. Thomson は陰極線の磁場と電場による偏向を調べ、比電荷 e/m を測定 (1897) した。

Millikan と Fletcher³ は油滴実験で素電荷 e を測定 (1909-1913) した。

3.1.3 陽子

Goldstein⁴ は放電管の陽極からでるカナル線を発見 (1886)、後に陽子と同定されるものを含んでいるが、種々の正電荷のイオンから構成されていた . J. J. Thomson の電子の比電荷の測定後、Goldstein は原子が中

¹Johann Josef Loschmidt (1821-1895) オーストリアの科学者 (化学、物理学、結晶学)

²Jean Baptiste Perrin (1870-1942) フランスの物理学者、科学者。ノーベル物理学賞 (1926)

³Harvey Fletcher (1884-1981) アメリカの物理学者

⁴Eugen Goldstein (1850-1930) ドイツの物理学者

性であるので電子は正電荷のもの（陽子に対応）と結び付いてなければならぬと議論したが、彼の実験から比電荷を求めるとガスの種類ごとに異なっていたので、彼の指摘は無視された。

W. Wien はカナル線の比電荷 e/m を測定し、粒子の質量が水素原子と等しいことを見つけた (1898)。これは質量分析器の元祖である。

一般に陽子の発見者といわれているのは E. Rutherford⁵ である。彼は 1918 年に α 粒子を窒素原子に衝突させて、陽子が得る反応を見つけた。

3.1.4 α 粒子

α 粒子とは陽子 2 個、中性子 2 個からなる原子核で、放射線の 1 種である。

Rutherford は、1898 年にウランから α 線と β 線がでていることを発見、1899 年に放射線のアルミ箔の透過を調べ、 α 線と β 線を分離、命名した。

1902, 1903 年には Rutherford は α 粒子の比電荷を測定した。

3.1.5 中性子

Chadwick (1932)

3.1.6 Zeeman 効果

Zeeman⁶ 効果：原子から放出される電磁波のスペクトル線が磁場により複数に分裂。Zeeman がナトリウムの D 線が磁場中においたときに分裂するのを発見 (1896-1897)。

H. A. Lorentz や Larmor⁷ 等による古典電磁気学に基づく理論解析により、比電荷 e/m は陰極線の e/m と一致。

⁵Ernest Rutherford (1871-1937) ニュージーランドの物理学者。1908 年ノーベル化学賞

⁶Pieter Zeeman (1865-1943) オランダの物理学者。1902 年ノーベル物理学賞

⁷Joseph Larmor (1857-1942) アイルランドの物理学者、数学者。

3.1.7 α 線の散乱実験

Geiger⁸ と Marsden⁹ は Rutherford の指導の下に 1909 年に α 線をスリットに通して細いビームにして金箔に当て、硫化亜鉛 (ZnS) の蛍光スクリーンで α 粒子の散乱を調べる実験を行った。大部分の α 粒子はそのまま散乱されたが、大きな角度で散乱される α 粒子が一部あった。

Rutherford はこの実験結果を 1911 年に理論的に解析し、中心に正の電荷を持つ重い原子核があり、その回りを軽い負の電荷を持つ電子が回っているとして解釈できることを示した。

しかしこのようなモデルは古典電磁気学では不安定であり、円運動する電子が電磁波を放出して極めて短時間で電子が原子核に落ち込む。

3.2 作用変数、断熱不変量

古典解析力学で、周期系で重要な

$$J = \oint pdq \quad (3.1)$$

という量 (作用変数、断熱不変量) がある。これは位相空間で軌道が囲む面積である。作用変数は正準変換にたいして不変である。また、周期系があるパラメーターに依存するとき、そのパラメーターがゆっくり変化しても作用変数は変化しない。作用変数は天体力学の周期運動の摂動問題に関して Delaunay¹⁰ により導入された。

1 次元調和振動子、つまり質量 m の質点が、復元力

$$F = -kq \quad (3.2)$$

で表される系では、ハミルトニアンは

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 \quad (3.3)$$

となり、運動方程式は

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad (3.4)$$

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq \quad (3.5)$$

⁸Johannes (Hans) Wilhelm Geiger (1882-1945) ドイツの物理学者

⁹Ernest Marsden (1889 - 1970) イギリス、ニュージーランドの物理学者

¹⁰Charles-Eugène Delaunay (1816-1872) フランスの天文学者、数学者

その解は

$$q = A \sin(\omega t + \alpha), \quad (3.6)$$

$$p = m\omega A \cos(\omega t + \alpha) \quad (3.7)$$

ここで A は振幅、 α は初期位相、 $\omega (\equiv 2\pi\nu)$ は角振動数で

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.8)$$

である。

エネルギーは

$$\begin{aligned} E &= \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}q^2 \\ &= \frac{(m\omega A \cos(\omega t + \alpha))^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(A \sin(\omega t + \alpha))^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

である。

この場合、作用変数 (断熱不変量) は

$$\begin{aligned} \oint pdq &= \oint m\omega A \cos(\omega t + \alpha) d(A \sin(\omega t + \alpha)) \\ &= m\omega^2 A^2 \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t + \alpha)^2 dt \\ &= m\omega^2 A^2 \frac{1}{2} \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{2\pi E}{\omega} = \frac{E}{\nu} \end{aligned} \quad (3.10)$$

となる。

3.3 Bohr の理論

3.3.1 Bohr の理論

Bohr¹¹ の理論 (1913)

¹¹Niels Henrik David Bohr (1885-1962) デンマークの理論物理学者、1922 年ノーベル物理学賞

1. 定常状態、エネルギー準位

原子内の電子のエネルギーは勝手な値をとれず、その原子に特有なとびとびの値

$$E_1, E_2, E_3, \dots$$

をとる。

この状態では原子は光の放射を行わない。これを定常状態という。

2. 量子飛躍、状態の遷移

原子が電磁波の放出や吸収を行うのは、ある定常状態から別の定常状態に移る時である。

振動数 ν の電磁波を放出したとすると、エネルギー保存則より

$$h\nu = E_m - E_n \quad (3.11)$$

が成り立つ。

3. 定常状態においては、電子は通常の力学の法則にしたがって運動する。

3.3.2 量子化条件

定常状態を決めるのに必要な条件が、量子化条件 (quantum condition)

$$\oint pdq = nh \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (3.12)$$

である。ただし左辺の積分は $q-p$ 平面における閉曲線の囲む面積である。

Bohr の量子化条件の根拠は 1913 年当時は明らかでなかったが、後に de Broglie の物質波の仮説により説明されるようになる (式 (3.29) 参照)。

3.3.3 例

1 次元調和振動子

1 次元調和振動子を考えよう。Bohr の量子化条件 (3.12) と調和振動子の場合の断熱不変量 (3.10) から

$$\frac{E}{\nu} = nh \quad (3.13)$$

を得る。
したがって

$$E = nh\nu \quad (3.14)$$

となる。
さらに

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} \quad (3.15)$$

を導入すると、

$$E = n\hbar\omega \quad (3.16)$$

ここで ω は角振動数である。

水素原子

水素原子の問題を考える。簡単のため電子は半径 r の円周上で円運動をとする。電子の運動量は大きさ p で、円の接線方向を向く。座標 q を円周にそう長さと考え、電子が円を一周するとき、

$$\oint pdq = p \times 2\pi r = nh \quad (3.17)$$

陽子は e 、電子は $-e$ の電荷を持つから電子に働くクーロン力の大きさは

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.18)$$

遠心力とクーロン力の釣合から

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (3.19)$$

$p = mv$ と、 $2\pi pr = nh$ の関係から

$$r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} n^2 \quad (3.20)$$

$n = 1$ の場合を特にボーア半径

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \quad (3.21)$$

という。

次に電子の力学的エネルギー E を求めよう．電子の運動エネルギーは $p^2/2m$ 、クーロン力による位置エネルギーは $-e^2/4\pi\epsilon_0 r$ なので、

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.22)$$

$r = n^2 a$ の関係を利用すると

$$E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a n^2} \quad (3.23)$$

となる。

$m \rightarrow n$ の遷移に伴って放出される光の振動数 ν は

$$h\nu = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (3.24)$$

と表される．その結果、Rydberg 定数に対する理論式は

$$R = \frac{e^2}{8\pi h \epsilon_0 a c} = \frac{m e^4}{8 h^3 \epsilon_0^2 c} \quad (3.25)$$

となる．これはスペクトルから求めた実験値と良く一致する．

3.4 de Broglie 波

電磁波（振動数 ν 、波長 λ ）は、エネルギー E と運動量 $\vec{p}$ が

$$E = h\nu, \quad |\vec{p}| = \frac{h}{\lambda} \quad (3.26)$$

で与えられるような粒子として振舞うことが知られている（ $h = 6.626 \times 10^{-34} [\text{J} \cdot \text{s}]$ はプランク定数）。これを光子と呼ぶ。なお、光子はさらに質量 0 の粒子と考えられるので、 $E = c|\vec{p}|$ が成り立つ。

一方物質粒子も (1) 式の関係で与えられる振動数・波長の波動として振舞うことが知られている。

$$\nu = \frac{E}{h}, \quad \lambda = \frac{h}{|\vec{p}|} \quad (3.27)$$

これを de Broglie¹² 波 (1924) と呼ぶ。

¹²Louis de Broglie (1892-1987) フランスの物理学者．1929 年ノーベル物理学賞

3.4.1 de Broglie 波と量子化条件

Bohr の量子化条件と、de Broglie 波には密接な関係がある．水素原子で半径 r の円運動を考え、電子に伴う de Broglie 波の波長を λ とする．円周の長さが波長の整数倍となる条件は

$$2\pi r = n\lambda \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (3.28)$$

である．これに $\lambda = h/p$ を代入すると

$$pr = n\hbar \quad (3.29)$$

と表される．すなわち、電子の角運動量 pr は $\hbar$ の整数倍になり、Bohr の量子化条件と同一になる．

3.4.2 粒子と波の二重性

3.5 その後の発展

Bohr の理論は対応原理を元としたものである．このながれはやがて Heisenberg¹³ の行列力学 (1925) へとつながっていく．

一方 de Broglie の物質波のアイデアは Schrödinger¹⁴ の波動力学 (1926) へとつながる．彼とは独立に (やや早い?) Lanczos¹⁵ が波動力学と同等な方程式を導いている．ただし、彼の導いた方程式は積分方程式の形である．

両者は全く異なるように見えながら、両方とも量子力学の問題をきちんと解くことができた．水素原子では角運動量や遷移強度 (確率) までふくめて正しく計算できた．

両者が数学的に等価なことは Schrödinger, Lanczos, Pauli¹⁶ が示した．

当時は Schrödinger 形式の方が馴染みやすかったので教育でも良く採用されているが、電磁場の量子化には Heisenberg 形式の方が馴染やすい．

¹³Werner Heisenberg (1901-1976) ドイツの理論物理学者．1932 年ノーベル物理学賞．

¹⁴Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887-1961) オーストリアの理論物理学者．1933 年ノーベル物理学賞．

¹⁵Cornelius Lanczos (1893-1974) ハンガリーの数学者、物理学者．

¹⁶Wolfgang Ernst Pauli (1900-1958) オーストリアの理論物理学者．1945 年ノーベル物理学賞．

場の量子論へ発展していったのは Heisenberg 形式から生成消滅演算子をへてのことである．

別の系列として Feynman¹⁷ の経路積分がある．ゲージ場の量子化には威力を発揮する．

¹⁷Richard Phillips Feynman (1918-1988) アメリカの物理学者．1965 年ノーベル物理学賞．

第II部

特殊相对論

第4章 特殊相対論の基礎

物理学の歴史の中で数世紀に渡り力学、光学、電磁気学は別々に発展してきたが、19 世紀後半に Maxwell¹ の理論と Hertz の実験により電磁気学と光学の統一がなされた。

電磁気学と力学については、根本的に変換則が異なるため、そのままでは統一ができない。

光が波動であることを説明するため、波動の媒体としてエーテル (aether) 仮説が唱えられた。真空中では光は横波のみで縦波成分がないので、エーテル仮説で光を説明するためには剛体で非圧縮性だが天体の運航には影響を及ぼさないなどさまざまな不自然な点があった。これらは一応電磁波の発見と共に解決されたが、なおエーテルが静止している絶対空間の問題が残った。しかし地球のエーテルに対する運動は Michelson²-Morley³ の実験によって否定された。その後、Lorentz⁴ 収縮仮説などが提案された。

根本的にこれらの見方をかえ、電磁気学と力学の統一を果たしたのは 20 世紀初頭の Einstein の特殊相対論による。その後、さらに重力との統一をした一般相対論へと発展した。今や相対論は、素粒子論や宇宙論など他の物理学の基礎となるばかりでなく、GPS や航空機のレーザージャイロなど日常生活にも応用されている。

4.1 歴史的序論

4.1.1 Newton 力学と Galilei の相対性原理

Newton⁵ 力学の 3 法則

¹James Clerk Maxwell (1831-1879) イギリスの科学者 (物理、数学)

²Albert Abraham Michelson (1852-1931) アメリカの物理学者、1907 年ノーベル物理学賞

³Edward Morley (1838-1923) アメリカの物理学者

⁴Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928) オランダの物理学者、1902 年ノーベル物理学賞

⁵Isaac Newton (1643-1727) イギリスの科学者 (物理、数学、天文学)

1. 外力が作用していないとき、全ての物体は静止、または一定速度で直線運動する。
2. 物体に外力が作用しているとき、物体の加速度は外力に比例する。

$$\vec{f} = m\vec{a} \quad (4.1)$$

3. 作用と反作用の大きさと方向は等しく、向きは反対である。

Newton の法則のうち、最初のを慣性の法則とよぶ。実は座標系によっては慣性の法則は必ずしも成り立たつわけではない。慣性の法則が成り立たないように見える座標系の例は、回転座標系での運動、重力中での自由落下する座標系である。慣性の法則が成り立つ座標系を特に慣性系 (inertial system) とよぶ。

古典的相対原理

Galilei⁶ の相対性原理

「どの慣性座標系を基準にとっても Newton の力学法則は同じ形式に書き表される。」

2つの直交座標系 S と S' を考える。 S 系の各軸と S' 系の各軸とはそれぞれ平行で、 x' 軸は x 軸に重なっているものとする。時刻は $t = 0$ の瞬間に $t' = 0$ のように設定する。また $t = 0$ では2つの直交座標系は一致しているとする。 S 系から見たとき S' 系は x 軸の正の方向に一定の速度 v で運動しているものとする。

S を基準にしたとき、時刻 t における質点の位置 (直交座標) を x, y, z 、同じ瞬間に S' から見た座標を x', y', z' とすると (図 4.1)、

$$x' = x - vt, y' = y, z' = z, t' = t \quad (4.2)$$

したがって S 系および S' 系から見た、速度および加速度は

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt} - v, \quad \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt}, \quad (4.3)$$

$$\frac{d^2x'}{dt'^2} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y'}{dt'^2} = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z'}{dt'^2} = \frac{d^2z}{dt^2} \quad (4.4)$$

⁶Galileo Galilei (1564-1642) イタリアの科学者 (物理学、天文学、数学)

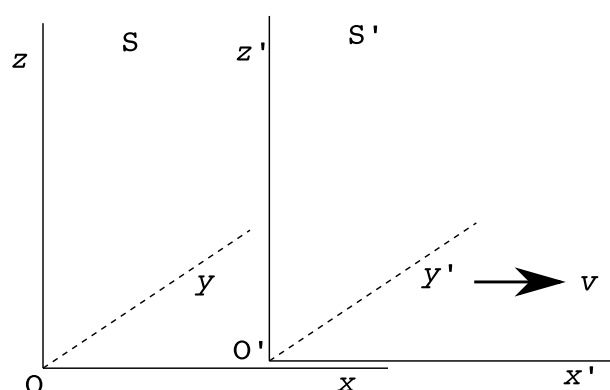


図 4.1: ガリレイ変換

となる。S を慣性系とすれば Newton の運動方程式

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{f} \quad (4.5)$$

が成り立つ。ここで $\vec{f}$ は S 系から見た力を表す。S' 系から見た力を $\vec{f}'$ とし、力は速度に無関係で $\vec{f}' = \vec{f}$ とすれば、(4.4) と (4.5) から

$$m \frac{d^2 \vec{x}'}{dt'^2} = \vec{f}' \quad (4.6)$$

となり、S' 系から見た質点の運動についても (4.5) と全く同じ形の法則が成立している。

Galilei の相対性原理の重要な前提はどの慣性座標系でも時間の進みは一樣 (絶対時間) ということである。

4.1.2 光学

1. R. Hooke ⁷

光の波動説 (1660 年代)

光の波動の媒体を「エーテル」“aether” とнаずけ、回折と薄膜の干渉現象を研究した。

2. A. Newton

⁷Robert Hooke (1635-1703) イギリスの科学者

1670-1672 光学についての講義

「光学」“Opticks” (1704)

光の粒子説 (corpuscular theory of light) を主張、しかし光の回折を説明するため波動説も併用。

屈折、色とスペクトル、ニュートンリング

3. C. Huygens⁸

ホイヘンスの原理 (1678)

4. T. Young⁹

Young の実験 (1805 年ころ)

複スリットによる干渉実験を行い、スクリーン上に干渉縞を観察、光が波動であることを実験的に確認した。

5. A.J.Fresnel¹⁰

回折現象を数学的に説明、実験とも良く一致した (フレネル回折)。

光が波動というだけでなく、偏光の振舞から横波 (振動方向が進行方向に対して垂直) であるという結論を得た。

複屈折現象の説明。

4.1.3 光速度の測定

1. Rømer¹¹ は木星の衛星イオの掩蔽の周期のずれから光速度を測定した (1676)。光速度が有限であることの初めての測定でもある。

ただし、光速度が有限と言う結論はすぐには受け入れられず、後述の Bradley の研究で学会の合意を得られるようになった。

2. Bradley¹² は地球の公転に伴う恒星の光行差から光速度を測定した (1728)。

⁸Christiaan Huygens(1629-1695) オランダの科学者 (物理学、天文学、数学)

⁹Thomas Young(1773-1829) イギリスの科学者 (物理学、生理学、エジプト学)

¹⁰Augustin-Jean Fresnel (1788-1827) フランスの科学者 (物理学、土木技師)

¹¹Ole Christensen Rømer (1644-1710) デンマークの天文学者。

¹²James Bradley (1693-1762) イギリスの天文学者。

3. Fizeau¹³ は回転歯車と半透明鏡を組み合わせた装置を使って光速度を測定した (1849) . 初めての地上での光速度測定である .
4. Foucault¹⁴ は回転鏡と半透明鏡を組み合わせた装置を使って光速度を測定した (1850) . また、空気中と水中の光速度を測定し、水中の光速度の方が遅いことを確認した . これによりニュートン流の光の粒子説は決定的に否定された。

また、1862 年には装置を改良してさらに高精度の光速度の測定値 (現在の値とは 0.6 % の誤差) を得た .

4.1.4 電磁気学

1. Cavendish¹⁵ の実験

Cavendish は 1773 年に 2 つの導体球を使って、電荷どうしに働く力が逆 2 乗則であることを確認した . ただし彼はこの結果を公表せず、1873 年に Maxwell により再実験、公表された .

2. Coulomb¹⁶ の法則 (1780 年代)

捻りばかりを用いた実験で、電荷どうしに働く力が逆 2 乗則ということを見出した .

ただし、Coulomb の実験精度は前述の Cavendish のものより劣る、現在でも電荷どうしに働く力を直接精度良く計測することは難しく、Cavendish や Maxwell の実験を改良したものが逆 2 乗則の確認に使われている .

3. Ampère¹⁷ の力の法則 (1820)

2 本の導線に電流を流すと力が働く .

4. Ampère の循環法則 (1826)

電流の回りに磁場が生じる。その磁場を周回積分すると電流の大きさと関連付けられる .

¹³Armand Hippolyte Louis Fizeau (1819-1896) フランスの物理学者 .

¹⁴Jean Bernard Léon Foucault (1819-1868) フランスの物理学者 .

¹⁵Henry Cavendish (1731-1870) イギリスの科学者 (化学、物理)

¹⁶Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806) フランスの物理学者

¹⁷André-Marie Ampère (1775-1836) フランスの物理学者、数学者

5. Faraday¹⁸

近接作用、誘導起電力発電機、モーター

6. Maxwell の方程式 (1864),

Faraday の近接作用のアイディアを数式の形に表した .

その結果、電磁波の速度が光速と一致し、また横波であることから光は電磁波の 1 種であると議論した。

7. Hertz の電磁波の実験 (1886-1887)

電磁波を発生、検出し、電磁波が直進、屈折、反射、回折、偏波 (横波の性質) などの性質を持つことを確認した . また電磁波の速度が光速と一致することを確認した .

4.1.5 エーテル仮説

光の波動説では、波動が伝わるには媒質が必要と考えられ、それはエーテル (aether) と呼ばれていた .

Fresnel の理論ではエーテルは弾性体と考えられたが、光速を説明するには非常に剛性率が高くなければならず、また光は横波のみで縦波成分はないことが知られているが、このためには全く圧縮されない媒質である必要がある。そのようなエーテルで満たされた空間の中を天体が自由に運動するのは不自然と考えられた . Maxwell の方程式と Hertz の実験以後は、電磁波をエーテルの振動とみなすことで上述の難点は一応解決された。

しかし、速度の合成則は粒子説と波動説では異なり、波動ではドップラー効果 (Doppler¹⁹effect) に見られるように媒質の静止系に対して波動の速度は一定である。同様に、エーテルの静止系は特別な意味を持つはずである。実際、Maxwell の方程式から導かれる波動方程式

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \mathbf{E} = 0 \quad (4.7)$$

は、Galilei 変換とは両立せず、特定の慣性座標系でのみ成立するようにみえる。そのような慣性系を絶対系と呼ぶことにしよう。

¹⁸Michael Faraday (1791-1867) イギリスの科学者 (物理、化学)

¹⁹Christian Andreas Doppler (1803- 1853) オーストリアの数学者、物理学者 .

エーテルの静止している絶対系と地球との相対運動の検出が次の課題となった．地球は太陽の回りを約 30 km/s で公転しているため、エーテルと相対運動しているはずである。つまり、地球の進行方向とそれに垂直な方向では、光の速さは 30 km/s 程度異なるはずである。

4.2 Michelson-Morley の実験

マイケルソン (A. A. Michelson) は地球がエーテルの絶対系に対してどのように運動しているかを求める実験を行った。その結果はエーテルの存在を否定するものであった。

1. Michelson の実験 (1881) ポツダム (ドイツ)

この時点ではまだ精度は不十分であったが、後の装置の原型となるものである。

Maxwell が当時の地上での光速度計測法 (光の往復) では、地球のエーテルに対する運動をはかろうとすると、 $(v/c)^2$ の効果を見ることになり精度的に無理と書いたことにたいして、この実験を工夫した。

2. Michelson-Morley の実験 (1887) クリーブランド (アメリカ)

精度の向上のために以下の改良をした。1 辺 1.5 m の正方形で厚さ 30 cm の岩石の上に光学系を設置した、水銀で装置全体を浮かべて水平に保ちかつ滑らかに回転するようにした。光路を何度も往復させ光路長を伸ばした。また温度変化の影響を避けるため、地下室で実験を行った。

図 4.2 はマイケルソン・モーレイの実験装置を簡略化して示したものである。光源 L から出た光は半透明鏡 M によりその一部分は反射されて M_2 にむかい、ここで鏡 M_2 に反射されて再び M に戻り、 M を通り抜けて干渉計に入る。また L からの光で半透明鏡 M を通過したものは M_1 に直進し、ここで鏡 M_1 に反射されて再び M に戻り、 M で一部反射されて干渉計に入る。前者の光路をたどった光を L_2 、後者の光路をたどった光を L_1 と呼べば、 L_1, L_2 は干渉して干渉縞を生じる。

この現象を絶対系からみたとき、 L_1, L_2 にどれだけの光路差が生じるかを計算してみよう。

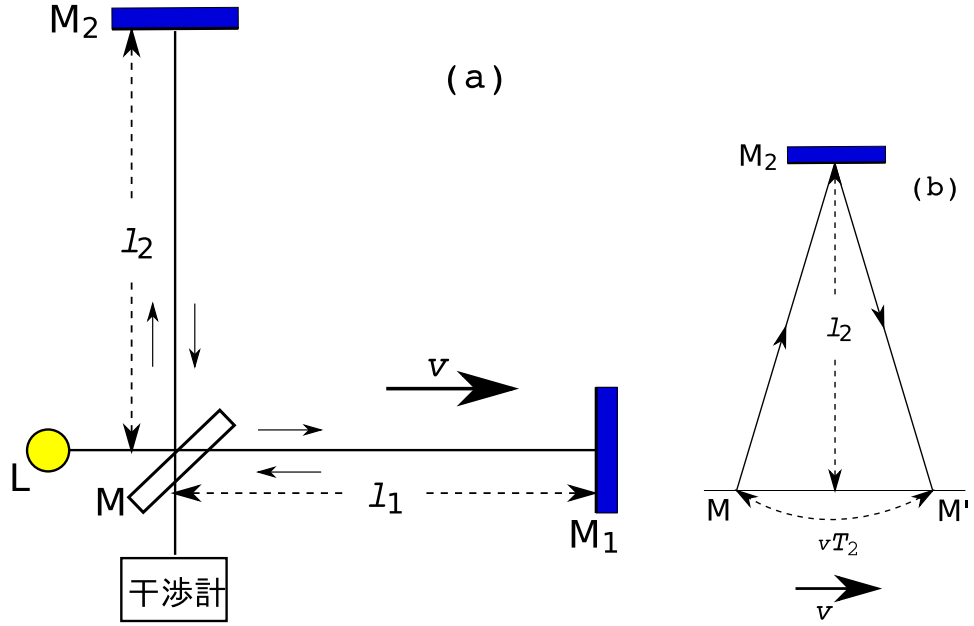


図 4.2: マイケルソン干渉計: M は半透明鏡.

この装置は地球上のある地点の水平盤上に置かれており、装置は絶対系に対して地球とともに $\overrightarrow{MM_1}$ の方向に一定の速さ v で直線運動をしているとする。

光 L_1 が MM_1 を往復するのに要した時間は

$$T_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1/c}{1-\beta^2}, \quad \beta = \frac{v}{c} \quad (4.8)$$

光 L_2 が MM_2 を往復するのに要した時間は

$$T_2 = \frac{2\sqrt{(l_2)^2 + (vT_2/2)^2}}{c} \quad (4.9)$$

これを解けば

$$T_2 = 2 \frac{l_2/c}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (4.10)$$

L_1 と L_2 の光路差 Δ は

$$\Delta = c(T_1 - T_2) = 2 \left(\frac{l_1}{1-\beta^2} - \frac{l_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \right) \quad (4.11)$$

次に装置全体を水平盤上で点 M を中心として 90 度回転させる． L_1 と L_2 の光路差 Δ' は

$$\Delta' = c(T'_1 - T'_2) = 2 \left(\frac{l_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - \frac{l_2}{1 - \beta^2} \right) \quad (4.12)$$

したがって装置の回転の始めと終わりでは光路差に

$$\delta = \Delta' - \Delta \approx -(l_1 + l_2)\beta^2 \quad (4.13)$$

だけの違いが生まれる．波長 λ の光を考えると位相差は、

$$\Delta\phi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} \approx -2\pi \frac{(l_1 + l_2)}{\lambda} \beta^2$$

である．そこで干渉計に、干渉縞の移動が起こるはずである．しかし実験で観測された干渉縞の移動は、エーテル仮説の理論値の $1/40$ 以下であった．

なお、Michleson-Morley の実験では以下の技術的理由から白色光の零次の干渉縞を用いたため、干渉計の 2 つの腕の長さは等しくなければならない ($l_1 = l_2$)．単色光では多数の干渉縞が観測されるが、波長の整数倍の不定性が伴う．白色光では零次以外の干渉縞は波長によって位置が違うので、色づいて見える．零次の干渉縞だけが白または黒い縞となる．

4.3 特殊 Lorentz 変換

Michelson-Morley の実験からは、光速度はあらゆる慣性系で同一である．しかしこれは Galilei の相対性原理とはあきらかに矛盾する．そこで、Galilei の相対性原理の背景にあった、絶対時間の概念をあきらめることでこの 2 つを両立できないか考察してみよう．

次の相対性原理と光速度不変の原理

1. 全ての物理法則はどの慣性系でも同等
2. 光速度不変の原理「真空中の光の速さは光源や観測者の運動状態に無関係」

を元にして、二つの慣性系 S と S' の間を結ぶ関係式を求めよう．

単純化のため、二つの慣性座標系 S と S' として、図 4.1 に示されたものを考える．

1. まず相対性原理から S 系から見た場合に1個の質点が等速直線運動をしているとすれば、 S' 系からも等速直線運動をしているように見えるはずである．そのためには x', y', z', t' が x, y, z, t の1次式で表されていればよい。
2. xy 面と $x'y'$ 面、 xz 面と $x'z'$ 面は常に一致したままであるから、 $z = 0$ なら $z' = 0$ 、また $y = 0$ なら $y' = 0$ が x, t に無関係に成立する．したがって次の関係式が成り立つ．

$$y' = \kappa(v)y, \quad z' = \kappa(v)z \quad (4.14)$$

κ は x, y, z, t には無関係な比例定数だが、 v には依存してもかまわない． y, z' の比例係数が同じであるのは、空間の等方性にもとづく．同じく空間の等方性から v を $-v$ にしても κ は変わらない．したがって $\kappa(v)$ は $|v|$ の関数である．

逆に S' 系から S を見た場合、 S は x' 軸の負の向きに速さ v で走っているので、

$$y = \kappa(-v)y', \quad z = \kappa(-v)z' \quad (4.15)$$

が成立する．したがって (4.14), (4.15) から

$$(\kappa(|v|))^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad \kappa(|v|) = \pm 1 \quad (4.16)$$

となる．ここで $v \rightarrow 0$ とすれば $y' \rightarrow y, z' \rightarrow z$ となるはずなので、結局 $\kappa(|v|) = 1$ となる．したがって

$$y' = y, \quad z' = z \quad (4.17)$$

がえられる。

3. 次に光速度不変の原理を考えよう．いま $t = t' = 0$ の瞬間に S の座標原点 O で光源が点滅したとする．その閃光は時間 t がたつとともに O を中心に球面状に速さ c でひろがっていく．この現象を S から観測すると、点 P (座標 (x, y, z)) に光の波面が到達する時刻を t とすると、

$$s^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0 \quad (4.18)$$

がなりたつ．これを S' 系から眺める．点 P は S' 系では座標 (x', y', z') で表現される．光の波面が点 P に到達する時刻を S' 系で t' とすると、光速度不変の原理から

$$s'^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = 0 \quad (4.19)$$

となる。

次に、 x', y', z', t' が x, y, z, t の 1 次式である (相対性原理) ことと、(4.18) がなりたてば (4.19) も成り立つべきである (光速度不変の原理) という要請から、 $s^2 \neq 0$ について

$$s'^2 = \alpha(v)s^2 \quad (4.20)$$

が成り立っている。 $\alpha(v)$ は x, y, z, t には無関係で、 v には依存してもかまわない。空間の等方性から前述と同じ推論で

$$s^2 \equiv x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (ct')^2 = s'^2 \quad (4.21)$$

が導かれる。

4. (x, t) と (x', t') の関係を整理すると、

$$x^2 - (ct)^2 = x'^2 - (ct')^2 \quad (4.22)$$

ここで

$$x' = ax + bt, \quad t' = fx + gt \quad (4.23)$$

とおく。 a, b, f, g は座標には無関係で v のみの関数である。

(4.23) を (4.22) に代入して、任意の x, t について成立するという要請から

$$\begin{aligned} a^2 - c^2 f^2 &= 1 \\ ab - c^2 fg &= 0 \\ g^2 - b^2/c^2 &= 1 \end{aligned} \quad (4.24)$$

が導かれる。この解は、

$$a = \pm \cosh \theta, \quad b = \mp c \sinh \theta = -ca \tanh \theta, \quad (\text{複号同順}) \quad (4.25)$$

および

$$f = \pm \frac{1}{c} \sinh \theta, \quad g = \mp \cosh \theta = -\frac{cf}{\tanh \theta} \quad (\text{複号同順}) \quad (4.26)$$

である。ここで、 θ は

$$\tanh \theta = -\frac{b}{ca}$$

で与えられる．

さらにパラメーター θ を求めるため、次の考察をする． S' 系の座標原点 O' は S 系から見たとき、速さ v で x 軸の正の方向に走っている． O' は $x' = y' = z' = 0$ であらわされる。

$$ax + bt = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (4.27)$$

つまり、

$$x = -\frac{b}{a}t \quad (4.28)$$

したがって

$$-\frac{b}{a} = v \quad (4.29)$$

つまり、

$$\tanh \theta = \frac{v}{c} \quad (4.30)$$

である。以下、

$$\beta = \frac{v}{c}$$

とおく。すると、

$$\begin{aligned} \cosh \theta &= (1 - \tanh^2 \theta)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \sinh \theta &= \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

以上をまとめると、

$$x' = \pm \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.32)$$

および

$$t' = \pm \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.33)$$

となる。

さらに $v \rightarrow 0$ で $x' \rightarrow x$, $t' \rightarrow t$ となるためには

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.34)$$

でなければならない．この関係式は、Lorentz および Poincaré²⁰ によって、Einstein とは独立に導かれた．Einstein は 2 人の研究を知らずに、少しおくれて導いたのであるが、彼の元とした前提は先の 2 人よりずっと単純であったので、大きな意義がある．現在この変換は Lorentz 変換と呼ばれる．

なお、(4.34) を逆に解くと、

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.35)$$

となる．これは (4.34) で $v \rightarrow -v$, $(t, x, y, z) \rightarrow (t', x', y', z')$ と置き換えたものに他ならない．

4.4 特殊 Lorentz 変換からの結果

慣性系 S から慣性系 S' への (4.34) にしたがう変換は、Lorentz 変換の中でも特に簡単な場合で、特殊 Lorentz 変換と呼ばれる．そのような簡単な変換でも従来の物理概念からの変更が生じる．この節では特殊 Lorentz 変換から生じるいくつかの結果を述べる．

まず、いくつかの用語を導入する．物理現象を記述するには、その出来事が起きた時間と空間を示す必要がある．相対論では出来事を事象 (event) と呼ぶ．事象は時空内の 1 点で表されるが、これを世界点 (world point) と呼ぶ．事象が時間的に継続すれば、それは時空間の曲線で表されるが、それを世界線 (world line) と呼ぶ．

4.4.1 同時刻の相対性

(4.34) によれば、慣性系によって時刻は異なる．このことから、空間的に離れた 2 点での事象が「同時刻」ということがある慣性系で成り立っていても別の慣性系では成り立たない．

これらの関係を図で示してみよう．空間方向は x 軸のみを考え、 y, z 軸は省略する．横軸を x 軸とし、これに直角な縦軸で ct を表す (図 4.3)． S' 系の座標軸については、 x' 軸は $t' = 0$ で表され、(4.34) から $ct = \beta x$ と

²⁰Jules Henri Poincaré (1854- 1912) フランスの数学者、理論物理学者

いう直線に相当する. 同様に ct' 軸は $x' = 0$ で表され、 $x = \beta ct$ となる. x' 軸の傾きは $\tan \theta = \beta$ である.

2つの事象が世界点 P, Q に起きたとする. これらを S 系から見たとき同時刻とする. S から見た P, Q の時刻と場所をそれぞれ $(t, x = a)$ および $(t, x = b)$ とする. これらを S' 系から見た場合の座標を $(t'_P, x' = a')$ および $(t'_Q, x' = b')$ とする. (4.34) を P, Q に使えば

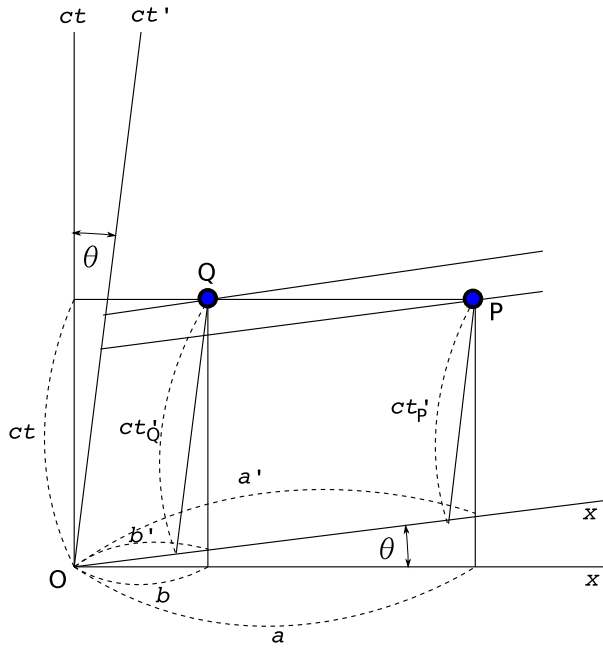


図 4.3: 同時刻の相対性: 慣性系 S から見たとき、事象 P, Q は同時刻であるが、慣性系 S' からは同時刻ではない.

$$ct'_P = \frac{ct - \beta a}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad ct'_Q = \frac{ct - \beta b}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (4.36)$$

したがって

$$t'_Q - t'_P = \frac{(a - b)\beta}{c\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.37)$$

$a > b$ だから、 $t'_Q > t'_P$. つまり S' 系で見れば事象 Q より事象 P の方が先に起きる.

4.4.2 Lorentz 収縮

棒が S' 系の x' 軸上に固定されているとする. その両端を図 4.4 のように A,B とする. S' 系から見た A,B の x' 座標をそれぞれ $x' = a', x' = b'$ とする. S' 系から見た棒の長さは $l_0 = a' - b'$ である. これを S 系から見ると、棒は x 軸の正の向きに速さ v で走っている. この長さを測るには、 S 系から見たある瞬間における A,B の x 座標 $x_A(t) = a, x_B(t) = b$ を求めれば良い. S 系から見た棒の長さ l は $l = a - b$ で与えられる.

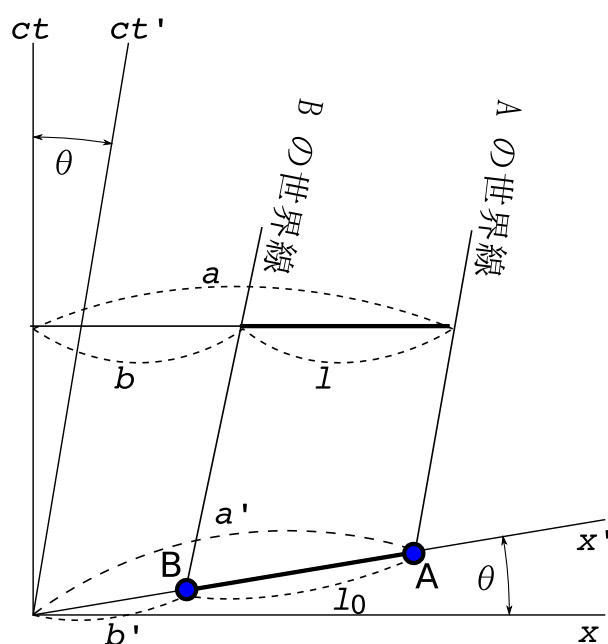


図 4.4: ローレンツ収縮: 運動している棒の長さは短く観測される.

(4.34) の第 2 式を同一時刻における A,B に使えば、

$$a' = \frac{a - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad b' = \frac{b - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.38)$$

したがって

$$l_0 = a' - b' = \frac{a - b}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (4.39)$$

すなわち

$$l = a - b = l_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (4.40)$$

これは Lorentz 収縮にほかならない.

4.4.3 走っている時計の遅れ

2個の時計 W_1, W_2 はそれぞれ S, S' の座標原点 O, O' に固定されているとする. W_1 が時刻 t を示したとき、 W_2 の x 座標は $x = vt$ である. これを S' 系から見れば、 W_2 の座標は $(x' = 0, t')$ となる. これから t' と t の関係を求めよう. (4.34) の第2式によれば、

$$t' = \frac{t - (v/c^2)vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} = t\sqrt{1 - \beta^2} < t \quad (4.41)$$

となる. これが有名な「走っている時計は遅れる」という現象である.

つぎに時計 W_2 が $x = f(t)$ という式にしたがって x 軸上を運動している場合を考える. Δt を十分小さくとると、 t から $t + \Delta t$ までは W_2 は速度 $v(t) = df/dt$ で等速直線運動しているとみなすことができるので、

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{df}{dt} \right)^2} \quad (4.42)$$

そこで W_1 が 0 から T まで進む間に W_2 は

$$T' = \int_0^{T'} dt' = \int_0^T \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{df}{dt} \right)^2} dt \quad (4.43)$$

だけ進む. なお $f(t)$ がどのような関数でも

$$T' \leq T$$

である.

なお、上述の導出では、重力以外の外力が時計に作用して時計が加速度運動しても、加速度は時計の進みに影響を与えないと仮定している.

重力が作用する時には時計の進みに影響がでる.

4.4.4 振動数、波長の変換則

振幅が A 、振動数が ν 、波長が λ の波は

$$A \sin 2\pi \left(\frac{1}{\lambda} \vec{n} \cdot \vec{x} - \nu t + \alpha \right) \quad (4.44)$$

と表される．ここで $\vec{n}$ は波の進行方向を表す単位ベクトル、 α は位相である．波が節となるのは慣性系 S, S' のいずれから見ても同じはずだから

$$\frac{1}{\lambda} \vec{n} \cdot \vec{x} - \nu t = \frac{1}{\lambda'} \vec{n}' \cdot \vec{x}' - \nu' t' \quad (4.45)$$

が成立する． $\nu', \lambda', \vec{n}'$ は S' 系から見た振動数、波長、進行方向の単位ベクトルである．波数ベクトル

$$\vec{k} = \frac{1}{\lambda} \vec{n}, \quad \vec{k}' = \frac{1}{\lambda'} \vec{n}' \quad (4.46)$$

を用いれば

$$\vec{k} \cdot \vec{x} - \nu t = \vec{k}' \cdot \vec{x}' - \nu' t' \quad (4.47)$$

となる．この左辺に (4.35) を代入して、両辺の x', t' の係数を比較すると、

$$\nu' = \frac{\nu - vk_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad k'_x = \frac{k_x - (v/c^2)\nu}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z \quad (4.48)$$

となる．

上の式を真空中を伝搬する光に当てはめる．光源は S 系の xy 面上に静止しているとする． xy 面内で x 軸と角 θ をなす方向に進む波を考える．これを S' から見たとき x' 軸となす角を θ' とする．つまり $\vec{n} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ と $\vec{n}' = (\cos \theta', \sin \theta', 0)$ である．さらに光の場合には $\nu\lambda = c$ が成り立つ．したがって、

$$\nu' = \nu \frac{1 - \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \nu' \cos \theta' = \nu \frac{\cos \theta - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \nu' \sin \theta' = \nu \sin \theta \quad (4.49)$$

となる．これらを組み合わせると

$$\tan \theta' = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{\cos \theta - \beta} \quad (4.50)$$

あるいは

$$\tan \frac{\theta'}{2} = \tan \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (4.51)$$

となる．

(4.49) の最初の式はドップラー効果に相対論的修正をしたものに他ならない．ただし、古典論では光源が静止していて観測者が速度 $\vec{v}$ で走っ

ている場合と、逆に観測者が静止していて光源が速度 $-\vec{v}$ で走る場合は振動数が異なるが、相対性理論では両者は一致する。

(4.49) で興味深いのは横ドップラー効果または二次のドップラー効果と呼ばれる現象である。S' 系から見て光の進行方向が x' 軸上に垂直な場合を考えよう。この場合 (4.49) の第2式から $\cos \theta = \beta$ となるので、これを (4.49) の第1式に代入すれば

$$\nu' = \nu \sqrt{1 - \beta^2} \quad (4.52)$$

となる。

また、(4.50) は光行差に対する相対論的公式である。

4.4.5 速度の合成則

Galilei 変換における速度の合成は単純な加算であった。しかしこれでは光速以下の速度の合成であっても、合成速度が光速以上になり得る。そこで相対論的に正しい合成則を求めてみよう。

S' 系から見たとき1個の質点が

$$x' = x'(t'), \quad y' = y'(t'), \quad z' = z'(t') \quad (4.53)$$

という運動をしているとしよう。この質点を S' 系から見た速度は

$$u'_x = \frac{dx'(t')}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'(t')}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'(t')}{dt'} \quad (4.54)$$

$$u' = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2} \quad (4.55)$$

である。この運動を S 系から見たとき、

$$u_x = \frac{dx(t)}{dt}, \quad u_y = \frac{dy(t)}{dt}, \quad u_z = \frac{dz(t)}{dt} \quad (4.56)$$

$$u = \sqrt{(u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2} \quad (4.57)$$

とする。両者の関係を調べよう。(4.35) を使うと

$$dx = \frac{dx' + v dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = \frac{dt' + (v/c^2) dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4.58)$$

が成り立つ. そこで上の第 1,2,3 の式を第 4 式で割れば

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + (u'_x v/c^2)}, \quad u_y = \frac{u'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + (u'_x v/c^2)}, \quad u_z = \frac{u'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + (u'_x v/c^2)} \quad (4.59)$$

となる. また u は

$$\begin{aligned} u^2 &= u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \\ &= \frac{(u'_x + v)^2 + (u_y'^2 + u_z'^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 + (u'_x v/c^2))^2} \\ &= \frac{c^2(1 + (u'_x v/c^2))^2 - c^2(1 - u'^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 + (u'_x v/c^2))^2} \end{aligned} \quad (4.60)$$

となる. これより

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{(1 - u'^2/c^2)(1 - v^2/c^2)}{(1 + (u'_x v/c^2))^2} \quad (4.61)$$

これから明らかなように $|u'| < c$, $|v| < c$ ならば合成された速さ u も $|u| < c$ である. したがって光速以下の速度を加えても、必ず合成速度は光速以下になる. もし、 $|u'|$, $|v|$ のどちらかが c に等しければ $|u| = c$ となることもわかる.

4.5 実験的検証

- Kennedy-Thorndyke

Michelson-Morley の実験結果は、Fitzgerald-Lorentz の収縮仮説のみで説明できる.

そこで、単色光源を使い、干渉計の 2 つの腕の長さが異なる実験装置を使うと、Lorentz 収縮による効果と、時間の遅れを分離して検証できる.

R.J. Kennedy and E.M. Thorndike, Experimental Establishment of the Relativity of Time Phys. Rev. 42 400-418 (1932)

特殊相対性理論から予想される結果と 2 % 以内で一致した.

- 2 次のドップラー効果は運動する原子のスペクトルから確認された.

H.E. Ives and G.R. Stilwell, An Experimental Study of the Rate of a Moving Atomic Clock J. Opt. Soc. Am. 28 215-226 (1938)

- レーザーを使った Michelson-Morley タイプの実験が行われ、エーテル仮説の理論値の 400 万分の 1 以下の実験値がえられている (Brillet-Hall experiment)
- 2 次のドップラー効果に付いては、2 光子吸収を用いた実験で 100 万分の 1 以下の精度で検証されている.

第5章 テンソル算

5.1 一般の Lorentz 変換

任意のひとつの事象 (ひとつの世界点) P を慣性系 S から見た時刻と場所を示す直交座標を (t, x, y, z) とする。今後便利のために $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ で定義された4つの数 x^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) をもって世界点の座標を表すことにする。 (x^0, x^1, x^2, x^3) を世界点 P の4次元座標とよぶ。同じ世界点 P を他の慣性系 S' から見た場合の座標を (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) とする。

ところで相対性原理によれば、 S 系から見て質点が等速直線運動しているならば、 S' 系でも等速直線運動になってなければならない。このことから x'^μ と x^μ の関係は1次式でなければならない。

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 a^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (5.1)$$

ここで、 $a^\mu{}_\nu$ は x^μ に無関係な16個の係数、 b^μ は S' 系から見たときの S 系の原点の座標を表す。ここで、次のような便法を採用する。数式の中の同じ項の中に同一の添字が上下の位置2箇所に表れたときにはその添字について0から3まで和をとるものと約束する (Einstein の規約)。たとえば、(5.1) は

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu$$

とあらわされる。特に S 系と S' 系の原点が一致するように選ぶと $b^\mu = 0$ となるので、

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu \quad (5.2)$$

である。

関係式 (5.1) に、光速度不変の原理にもとづく条件

$$-(x^0)^2 + \sum_{k=1}^3 (x^k)^2 = -(x'^0)^2 + \sum_{k=1}^3 (x'^k)^2 \quad (5.3)$$

を付け加える．ここで、

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu} = \begin{cases} 0 & (\mu \neq \nu) \\ -1 & (\mu = \nu = 0) \\ 1 & (\mu = \nu = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (5.4)$$

という記号を導入しよう．これを使うと条件 (5.3) は

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu \quad (5.5)$$

という形になる．

(5.2) に (5.2) を代入して x の係数を比較すると、

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} a^\rho{}_\mu a^\sigma{}_\nu \quad (5.6)$$

となる。

式 (5.2) にしたがう座標変換 $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ で、かつその係数 $a^\mu{}_\nu$ が条件式 (5.6) を満たすとき、それは Lorentz 変換である．(5.2) のかわりに (5.1) についてその係数が (5.6) を満たすとき、非斉次 Lorentz 変換とよぶ。

条件 (5.6) は添字 μ, ν について対称なので、10 個の条件式となる．係数 $a^\mu{}_\nu$ は 16 個の成分があるが、(5.6) の 10 個の条件式より、独立なパラメーターは $16-10=6$ 個である．これは、回転の自由度 3 つと、慣性系同士の相対速度ベクトルの自由度 3 つの和に当たる．

Lorentz 変換全体は数学でいう群をなす．単位元に相当するものは $a^\mu{}_\nu$ を

$$\delta^\mu{}_\nu = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases} \quad (5.7)$$

とおいた恒等変換

$$x'^\mu = x^\mu$$

である．

Lorentz 変換の逆変換もまた Lorentz 変換である．

$$x^\nu = b^\nu{}_\mu x'^\mu \quad (5.8)$$

逆変換の係数 $b^\nu{}_\mu$ と、元の Lorentz 変換の係数 $a^\mu{}_\nu$ の関係を求めてみよう．

まず $a^\mu{}_\nu$ を行列要素とする 4×4 行列 $\mathbf{A}$ を考えよう. つまり

$$(\mathbf{A})_{\mu\nu} \equiv a^\mu{}_\nu \quad (5.9)$$

と定義する. 同様に行列 $\mathbf{Y}$ を

$$(\mathbf{Y})_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} \quad (5.10)$$

で定義する. $\mathbf{A}$ の転置行列 $\mathbf{A}^T$ は

$$(\mathbf{A}^T)_{\mu\nu} \equiv (\mathbf{A})_{\nu\mu} = a^\nu{}_\mu \quad (5.11)$$

である. すると, (5.6) は

$$(\mathbf{Y})_{\mu\nu} = (\mathbf{A}^T \mathbf{Y} \mathbf{A})_{\mu\nu} \quad (5.12)$$

となる. 両辺の行列式をとると

$$\det(\mathbf{Y}) = \det(\mathbf{A}^T \mathbf{Y} \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T) \det(\mathbf{Y}) \det(\mathbf{A}) \quad (5.13)$$

ここで

$$\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A}), \quad \det(\mathbf{Y}) = -1 \quad (5.14)$$

を使うと

$$\det(\mathbf{A}) = \pm 1 \quad (5.15)$$

となる. したがって $\mathbf{A}$ の逆行列は存在する.

ここで新しい記号 $\eta^{\mu\nu}$ を導入しよう.

$$\eta^{\mu\nu} \equiv \begin{cases} 0 & (\mu \neq \nu) \\ -1 & (\mu = \nu = 0) \\ 1 & (\mu = \nu = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (5.16)$$

これを用いると, 行列 $\mathbf{Y}$ の逆行列 $\mathbf{Y}^{-1}$ は

$$(\mathbf{Y}^{-1})_{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} \quad (5.17)$$

と表される. これを使うと (5.12) から

$$\mathbf{1} = \mathbf{Y}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Y} \mathbf{A} \quad (5.18)$$

が導かれる．これを元の記号で書くと

$$\delta^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\lambda} a^\rho{}_\lambda \eta_{\rho\sigma} a^\sigma{}_\nu \quad (5.19)$$

一方、

$$\delta^\mu{}_\nu = b^\mu{}_\sigma a^\sigma{}_\nu \quad (5.20)$$

2つの式を比較して、

$$b^\mu{}_\sigma = \eta^{\mu\lambda} a^\rho{}_\lambda \eta_{\rho\sigma} \quad (5.21)$$

が得られた．今後、簡単のために右边を

$$\eta^{\mu\lambda} a^\rho{}_\lambda \eta_{\rho\sigma} \equiv a^\mu{}_\sigma \quad (5.22)$$

と記すことにする．

最後に (5.6) から導かれるもう一つの間係を調べよう．(5.6) で $\mu = \nu = 0$ とおけば、

$$-1 = -(a^0{}_0)^2 + \sum_{k=1}^3 (a^k{}_0)^2 \quad (5.23)$$

すなわち、

$$a^0{}_0 = \pm \sqrt{1 + \sum_{k=1}^3 (a^k{}_0)^2} \quad (5.24)$$

となる．したがって $a^0{}_0 \geq 1$ か $a^0{}_0 \leq -1$ である．つまり Lorentz 変換は $\det(A) = \pm 1$ および $a^0{}_0 \geq 1$ か $a^0{}_0 \leq -1$ によって4個の組に分類される．特に $\det(A) = 1$ で $a^0{}_0 \geq 1$ の変換を本義 Lorentz 変換 (proper Lorentz transformation) という．本義 Lorentz 変換に空間反転、時間反転を組み合わせると、一般の Lorentz 変換となる．

5.2 スカラー、ベクトル、テンソル

慣性座標系 S および S' からみた同一世界点 P の4次元座標をそれぞれ x^μ, x'^μ とする．これらの間には

$$x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu + b^\mu \quad (5.25)$$

と言う関係が成り立ち、その係数は非斉次 Lorentz 変換であるための条件式

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho\sigma} a^\rho{}_\mu a^\sigma{}_\nu \quad (5.26)$$

を満足しているものとする。

5.2.1 スカラー

ある物理量の S 系ならびに S' 系を基準とした場合の値をそれぞれ C, C' とするとき、常に

$$C = C' \quad (5.27)$$

が成り立つ場合に、 C をスカラー (scalar) とよぶ。また、4 次元時空内のある領域で、物理量が分布していて、S 系、S' 系での値を、それぞれ $\Theta(x) \equiv \Theta(x^0, x^1, x^2, x^3)$ および $\Theta(x') \equiv \Theta(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$ という関数で表そう。この領域内の全ての点で

$$\Theta(x) = \Theta'(x') \quad (5.28)$$

が成立するとき $\Theta(x)$ をスカラー場と呼ぶ (x と x' は同じ世界点を S, S' から見た座標である)。

5.2.2 反変ベクトル

4 個の成分を持つ物理量の S 系、S' 系を基準とした場合のそれぞれの成分を A^μ, A'^μ とする。これらの間に

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu = a^\mu{}_\nu A^\nu \quad (5.29)$$

という関係が成立するとき、これを反変ベクトル (contravariant vector) とよぶ。2 つの世界点 P, Q の座標差 $\Delta x^\mu = x_Q^\mu - x_P^\mu$ は反変ベクトルの一例である。

A^μ がある領域に分布していて、世界点の座標 x の関数で、これを S 系、S' 系から見たとき、それぞれ $A^\mu(x), A'^\mu(x')$ とする。さらにこれらが

$$A'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu(x) \quad (5.30)$$

を満たす場合、 $A^\mu(x)$ を反変ベクトル場という。

5.2.3 共変ベクトル

ベクトルには別の種類のものがある。4 個の成分を持つ物理量の S 系、S' 系を基準とした場合のそれぞれの成分を B_μ, B'_μ とする。これらの間に

$$B'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} B_\nu \quad (5.31)$$

という関係が成立するとき、これを共変ベクトル (covariant vector) とよぶ。

スカラー場 $\Theta(x)$ を微分した量

$$\Theta_\mu(x) \equiv \frac{\partial \Theta(x)}{\partial x^\mu} \quad (5.32)$$

は共変ベクトル場の一例である。

5.2.4 テンソル

ベクトルの概念を拡張したテンソルを説明しよう。例として2個の反変ベクトル場 $A^\mu(x), B^\mu(x)$ をとる。これらの成分の積

$$C^{\mu\nu}(x) \equiv A^\mu(x)B^\nu(x) \quad (5.33)$$

をつくる。 $C'^{\mu\nu}(x')$ と $C^{\mu\nu}(x)$ の間には

$$\begin{aligned} C'^{\mu\nu}(x') &\equiv A'^\mu(x')B'^\nu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} A^\rho(x)B^\sigma(x) \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} C^{\rho\sigma}(x) \end{aligned} \quad (5.34)$$

という関係が導かれる。一般に

$$C'^{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} C^{\rho\sigma}(x) \quad (5.35)$$

という変換則が成り立つとき C を2階反変テンソル場 (contravariant tensor field of the 2nd rank) という。

一般のテンソルの定義は以下ようになる。ある量 $T(x)$ の S 系、 S' 系からみた成分をそれぞれ

$$T^{\alpha\beta\cdots\gamma}_{\delta\epsilon\cdots\zeta}(x), \text{ および } T'^{\lambda\mu\cdots\nu}_{\rho\sigma\cdots\tau}(x') \quad (5.36)$$

とする。これらが

$$T'^{\lambda\mu\cdots\nu}_{\rho\sigma\cdots\tau}(x') = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta} \cdots \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\rho} \frac{\partial x^\epsilon}{\partial x'^\sigma} \cdots \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\tau} T^{\alpha\beta\cdots\gamma}_{\delta\epsilon\cdots\zeta}(x), \quad (5.37)$$

という関係で結ばれるとき $T(x)$ をテンソル場 (tensor field) とよぶ。この例で、上付き添字 $(\lambda\mu\cdots\nu)$ が r 個、下付き添字 $(\rho\sigma\cdots\tau)$ が s 個とする

とき、 T は r 階反変、 s 階共変の混合テンソル (mixed tensor) とよばれる。上付き添字だけのときは r 階反変テンソル (contravariant tensor of rank r)、下付き添字だけのときは s 階共変テンソル (covariant tensor of rank s) と呼ばれる。

テンソルの添字に対する注意を述べよう。例えば 2 階共変テンソル $F_{\mu\nu}$ の成分について、添字を入れ替えても値が変わらないとき、つまり

$$F_{\mu\nu} = F_{\nu\mu} \quad (5.38)$$

という性質を持つとき、 F を対称共変テンソルという。また、添字を入れ替えて符号だけが変わる時、つまり

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \quad (5.39)$$

という性質を持つとき、 F を反対称共変テンソルという。

高階のテンソルでも、1 対の添字の組の入れ替えについて、同様にして対称、反対称が定義される。高階テンソルであらゆる添字の入れ替えについて対称なテンソルを完全対称テンソル、高階テンソルであらゆる添字の入れ替えについて反対称なテンソルを完全反対称テンソルという。

テンソルの例

Kronecker の記号 δ^μ_ν は混合テンソルである。

$$\delta'^\mu_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} \delta^\alpha_\beta \quad (5.40)$$

$\eta^{\mu\nu}$ は 2 階の反変テンソルである。

$$\eta'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} \eta^{\alpha\beta} \quad (5.41)$$

5.3 テンソルの演算

5.3.1 和

2 つの同じ種類のテンソル $A^{\mu\nu}{}_\lambda$, $B^{\mu\nu}{}_\lambda$ の和を

$$C^{\mu\nu}{}_\lambda = A^{\mu\nu}{}_\lambda + B^{\mu\nu}{}_\lambda \quad (5.42)$$

とおくと、 $C^{\mu\nu}{}_\lambda$ は $A^{\mu\nu}{}_\lambda$, $B^{\mu\nu}{}_\lambda$ と同じタイプのテンソル場である。

5.3.2 スカラーとの積

スカラーとテンソルの積は同じタイプのテンソルである．たとえば、スカラー S とテンソル $A^{\mu\nu}{}_{\lambda}$ の積

$$SA^{\mu\nu}{}_{\lambda} \quad (5.43)$$

は元のテンソルと同じタイプのテンソルである．

5.3.3 テンソル積

異なるタイプのテンソルの積を考えよう．例えば $A^{\mu\nu}{}_{\lambda}$ と $B_{\alpha\beta}$ から

$$C^{\mu\nu}{}_{\lambda\alpha\beta} \equiv A^{\mu\nu}{}_{\lambda} B_{\alpha\beta} \quad (5.44)$$

のような5階の混合テンソルを作ることができる． C を A, B のテンソル積という．

5.3.4 テンソルの微分

テンソル場の微分もテンソルになる．例えば

$$\frac{\partial A^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x)}{\partial x^{\rho}} \quad (5.45)$$

は4階混合テンソルである．これは、形式的に共変ベクトル $\partial_{\rho} \equiv \partial/\partial x^{\rho}$ と $A^{\mu\nu}{}_{\lambda}(x)$ とのテンソル積とみなすことができる．

5.3.5 縮約

高階の混合テンソル $A^{\alpha\beta\cdots\gamma}{}_{\delta\epsilon\cdots\zeta}$ において、反変および共変成分の任意の1対を同じ添字とし、その添字について0,1,2,3と和をとり、2階分低い階のテンソルを作することを縮約 (contraction) という．たとえば

$$B^{\beta\cdots\gamma}{}_{\delta\cdots\zeta} = A^{\alpha\beta\cdots\gamma}{}_{\delta\alpha\cdots\zeta} \quad (5.46)$$

である。

5.3.6 内積

テンソル積と縮約を組み合わせると、内積が定義できる．例として、2 個のテンソル $A^{\mu\nu}{}_{\lambda}$, $B_{\alpha\beta}$ のテンソル積

$$C^{\mu\nu}{}_{\lambda\alpha\beta} \equiv A^{\mu\nu}{}_{\lambda} B_{\alpha\beta} \quad (5.47)$$

をもとめ、次にこれに縮約をして

$$C^{\mu}{}_{\lambda\alpha} \equiv C^{\mu\beta}{}_{\lambda\alpha\beta} = A^{\mu\beta}{}_{\lambda} B_{\alpha\beta} \quad (5.48)$$

あるいは

$$D^{\nu}{}_{\lambda\alpha} = A^{\beta\nu}{}_{\lambda} B_{\alpha\beta}, \quad E^{\nu}{}_{\lambda\beta} = A^{\alpha\nu}{}_{\lambda} B_{\alpha\beta}$$

のような種々の 3 階のテンソルを求める操作をテンソル A, B の内積という．

反変ベクトル A と共変ベクトル B よりスカラー

$$C = A^{\mu} B_{\mu} \quad (5.49)$$

が定義できるが、 C をベクトル A, B のスカラー積という．

5.3.7 テンソルのタイプの変換

ところで $\eta_{\mu\nu}$ を使うとテンソルの添字を自由に上下できる．たとえば、反変ベクトル A^{μ} と $\eta_{\mu\nu}$ の内積をとると

$$B_{\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} A^{\mu}$$

という共変ベクトルができる．逆に B_{ν} と $\eta^{\mu\nu}$ の内積から、

$$\eta^{\mu\nu} B_{\nu} = \eta^{\mu\nu} \eta_{\nu\lambda} A^{\lambda} = \delta^{\mu}{}_{\lambda} A^{\lambda} = A^{\mu}$$

のように元の A^{μ} が導かれる．このようにして得られた B_{ν} は元の A^{μ} とは表現が違うだけなので、今後の便利のため

$$A_{\mu} \equiv \eta_{\mu\nu} A^{\nu} \quad (5.50)$$

のようにあらわすことにする．テンソルについても同様に扱う．

$$T_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} \eta_{\nu\beta} T^{\alpha\beta} \quad (5.51)$$

5.3.8 ベクトルの分類

ベクトル A^μ の自分自身とのスカラー積

$$(A)^2 \equiv A_\mu A^\mu = \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = -(A^0)^2 + \sum_{k=1}^3 (A^k)^2 \quad (5.52)$$

を A の大きさの二乗という。これは正の値をとるとは限らない。 A^μ の空間成分の方が時間成分の値より大きくて

$$(A)^2 > 0$$

となるとき A^μ を空間的ベクトル (space-like vector)、逆に

$$(A)^2 < 0$$

となるとき A^μ を時間的ベクトル (time-like vector)、どちらでもないとき、つまり

$$(A)^2 = 0$$

をゼロベクトル (null vector) という。 $(A)^2$ はスカラーで Lorentz 変換してもその値は不変だから、 A がこれら3種類のベクトルのいずれかであるかという性質は座標系の取り方によらない、絶対的な性質である。

5.3.9 光円錐

図 5.1 で世界点 P と原点 O とを結ぶベクトルを考え、その成分を x^μ とする。 x^μ が空間的ベクトルならば点 P は円錐面

$$-(x^0)^2 + \sum_{k=1}^3 (x^k)^2 = 0 \quad (5.53)$$

の外側にある。空間的ベクトルで表わされる点の集合、つまり円錐面の外の領域を空間的 (space-like) 領域という。この領域の事象は原点での事象と因果関係を持つことが出来ない。

これに対し世界点 Q と O を結ぶベクトル y^μ が時間的ベクトルならば点 Q は円錐面の内部にある。このような領域を時間的 (time-like) 領域という。この領域の事象は原点での事象と因果関係を持つことが出来る。時間的領域はさらに O での事象に影響を与えうる過去の領域と、 O での事象から影響を受ける未来の領域に分けられる。

最後に世界点 R と O を結ぶベクトル z^μ がゼロベクトルならば点 R は円錐面上にある。これを光円錐 (light-cone) と呼ぶ。

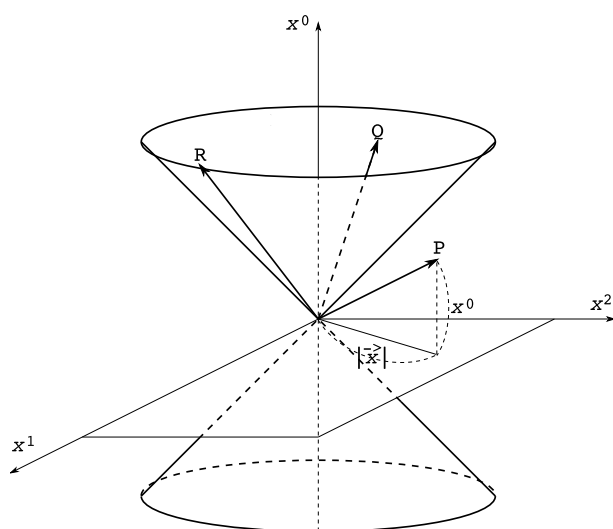


図 5.1:

5.3.10 ダランベール演算子

ベクトルのスカラー積として特に重要なものに

$$\square \equiv \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (5.54)$$

という演算子 (ダランベール演算子、ダランベールシアン (D'Alembertian) がある。

後で見るように電磁波がどの慣性系から見ても一定の早さ c で伝搬するのはこの関係式に由来する。

第6章 相対論的力学

6.1 相対論的運動学

Newton 力学は Galilei 変換にたいして不変であるが、Lorentz 変換に対しては不変ではない．そこで Newton 力学を少し修正して Lorentz 変換にたいして不変になるようにしよう。

Newton の力学では質点の運動は、質点の空間座標 $x^k (k = 1, 2, 3)$ を時間 t の関数で書き下すことにより表現される．しかしこの表現法は時間と空間を同格に扱っていないので、相対論に馴染まない．できれば Lorentz 変換にたいして不変なパラメーター λ を適当に見つけて、質点の 4 元座標 $x^\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ を λ の関数として表現したい．このようなパラメーターとして最適なものは質点の描く世界線の 4 次元的道のりである．質点が、世界点 x^μ から $x^\mu + \Delta x^\mu$ (Δx^μ は微小量) まで移動した場合、両点のあいだの 4 次元的不変距離 (の 2 乗) は

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu = -c^2 (\Delta t)^2 + (\Delta \vec{x})^2$$

であたえられる．これは $(\Delta \lambda)^2$ の候補である．しかし質点の 3 次元的速度 $\vec{v} = \Delta \vec{x} / \Delta t$ の大きさは常に光速 c より小さいために、反変ベクトル Δx^μ は必ず時間的ベクトルになり、したがって Δs^2 は必ず負となる。

そこで、混乱を避けるために $\Delta s^2 = -c^2 (\Delta \tau)^2$ と書き直す．つまり Lorentz 変換にたいして不変な実数のパラメーター τ の (微小な) 増加量 $\Delta \tau$ は

$$-c^2 (\Delta \tau)^2 \equiv \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu \quad (6.1)$$

であたえられる．今後このように定義された τ を前述の λ として用い、質点の 4 次元的位置を $x^\mu(\tau)$ であらわすことにする．なお、(6.1) 式は次のような形にも表される．

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{v}}{c} \right)^2} \quad (6.2)$$

$\vec{v} = d\vec{x}/dt$ は質点の3次元的速度である。

τ はこの質点の固有時間 (proper-time) とよばれる。このことを説明しよう。ある瞬間にこの質点と同じ速度で走っている慣性座標系 S' 系からこの質点を眺めたとしよう。質点の座標を $x'^\mu(\tau)$ とすれば、質点は瞬間 τ には静止して見えるから $x'^k(\tau) = x'^k(\tau + \Delta\tau)$ ($k = 1, 2, 3$)、また $x'^0(\tau + \Delta\tau) - x'^0(\tau) = \Delta x'^0 = c\Delta t'$ となる。したがって、

$$-c^2(\Delta\tau)^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x'^\mu\Delta x'^\nu = -c^2(\Delta t')^2.$$

つまり $\Delta\tau = \Delta t'$ で、質点と一緒に運動している時計の t' は τ と同じように進んでいることを意味する。

τ は Lorentz 不変なスカラーであるから、質点の位置 $x^\mu(\tau)$ の変化率

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (6.3)$$

は x^μ と同じ変換性を持ち、したがって反変ベクトルである。これを質点の4元速度 (four-velocity) という。

4元速度と静止系への Lorentz 変換の間には以下の関係が成り立つ。ある瞬間に質点と同じ早さではしる慣性座標系 S' をとり、 S' 系の原点と質点を一致させる。この S' からみた質点の座標を $x'^\mu(\tau) = (x'^0, \vec{x}' = 0)$ とし、他の慣性座標系 S からみた質点の座標を $x^\mu(\tau)$ とする。これらは Lorentz 変換

$$x'^\mu = a^\mu_\nu x^\nu, \text{ あるいは } x^\nu = b^\nu_\mu x'^\mu = b^\nu_0 x'^0 \quad (6.4)$$

で結ばれているとする。2番目の式を固有時間 τ で微分すると、

$$u^\nu = b^\nu_0 c \frac{dt'}{d\tau} = cb^\nu_0 \quad (6.5)$$

となる。

4元速度 u^μ と3次元速度 $\vec{v}$ との関係は (6.2) を使って次のようになる。

$$u^k = \frac{v^k}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad u^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (6.6)$$

ここで $k = 1, 2, 3$, $\beta = |\vec{v}|/c$ である。これを使うと恒等式

$$\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -c^2 \quad (6.7)$$

を示すことが出来る。これは、(6.1) を $(\Delta\tau)^2$ で割って導くことも出来る。

4 元加速度は

$$a^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} \quad (6.8)$$

によって定義される．これも反変ベクトルである．ところで恒等式 (6.7) のためにベクトル a^μ と u^μ は「直交」する．すなわち

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu a^\nu = 0 \quad (6.9)$$

となる。

6.2 力学の基礎方程式の相対論的修正

Lorentz 変換の公式は S と S' の相対速度が c に比べて十分小さくなると Galilei 変換の公式に近づく．したがって、質点の速さが c に比べ十分小さい場合は修正後の力学方程式は Newton の法則に十分近いと考えられる．

そこで次のような要請を前提とする．ある瞬間に質点と同じ運動をする慣性座標系 S' をとったとする．つまりこの瞬間は S' では質点は静止して見える．この様な静止系では、質点に対する Newton の運動方程式

$$m \frac{d^2x'^k}{dt'^2} = F'^k, \quad \frac{dx'^k}{dt'} = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (6.10)$$

がその瞬間だけ成り立つとする．ここで m は質点の質量、 F'^k は S' 系から見た外力の第 k 成分である．これにさらに

$$m \frac{d^2x'^0}{dt'^2} = F'^0 \quad (6.11)$$

を追加する．左辺は $d^2(ct')/dt'^2 = 0$ であるので、 $F'^0 = 0$ である．これらをまとめると、

$$m \frac{d^2x'^\mu}{dt'^2} = F'^\mu, \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad (6.12)$$

となる．この左辺には t' が含まれているのでその Lorentz 変換は複雑である．ところで S' 系がこの瞬間だけ質点の静止系なので、 t' を質点の固有时间 τ に置き換えることができる．つまり

$$m \frac{d^2x'^\mu}{d\tau^2} = F'^\mu, \quad (6.13)$$

この左辺は反変ベクトルである．したがって力学の法則が Lorentz 変換にたいして不変であるためには右辺の F'^μ も反変ベクトルでなければならない．実はこれは大事な仮定である．以前 Newton の運動方程式 (4.5) がガリレイ変換に対して不変であることを示す際に、外力はどの慣性系でも同じことを前提にしていたが、相対論ではこれが成り立たず、外力は Lorentz 変換を受けることになるからである．

S' 系から S 系への Lorentz 変換を (6.13) に行うと、一般の慣性系 S から見た力学の方程式は

$$m \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = F^\mu \quad (6.14)$$

とまとめられる．次に F^μ を静止系 S' の F'^i であらわしてみよう．変換 $S' \rightarrow S$ を

$$x^\nu = b^\nu_\mu x'^\mu$$

とすれば

$$F^\mu = b^\mu_\nu F'^\nu = \sum_{k=1}^3 b^\mu_k F'^k \quad (6.15)$$

となる．

相対論的な力 F^μ は4個の成分を持つ反変ベクトルである．これを4元力 (four-force) という．実は4元力の各成分は独立ではなく、次の関係が成り立っている．

$$u_\mu F^\mu = 0 \quad (6.16)$$

実際 (6.14) の両辺に u_μ をかけて縮約すると

$$m u_\mu a^\mu = u_\mu F^\mu$$

左辺は (6.9) により恒等的に 0 なので、(6.16) が成立する．

6.3 エネルギーおよび運動量

相対論的運動方程式 (6.14) を次のように書換える．

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = F^\mu \quad (6.17)$$

ここで p^μ は4元運動量 (four-momentum) とよばれ、その定義は

$$p^\mu \equiv m u^\mu = m \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (6.18)$$

である。定義から容易に p^μ は反変ベクトルであることがわかる。自由粒子、つまり外力がない場合 ($F^\mu = 0$) では

$$\frac{d}{d\tau} p^\mu = 0 \quad (6.19)$$

で、 p^μ は一定だが、これは運動量およびエネルギー保存則に対応する。

6.3.1 静止エネルギー

ここで p^0 の意味を考えるために、次のような考察をする。

$$\vec{p} = (p^1, p^2, p^3)$$

とおくと、(6.2) を使って

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{v}}{c}\right)^2}$$

ここで

$$\vec{K} \equiv \vec{F} \sqrt{1 - \left(\frac{\vec{v}}{c}\right)^2} \quad (6.20)$$

は Newton 力学の意味での力と考えられる。したがって、(6.17) の空間成分は

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{K} \quad (6.21)$$

と表される。

次に (6.17) の時間成分について考察してみよう。まず恒等式 (6.16) は (6.6) を用いて

$$cF_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = (\vec{v} \cdot \vec{K}) \quad (6.22)$$

と表すことが出来る。したがって (6.17) の時間成分は、

$$\frac{d}{dt}(cp^0) = cF_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = (\vec{K} \cdot \vec{v}) \quad (6.23)$$

となる。この右辺は単位時間中に外力が質点に与える仕事である。したがって

$$cp^0 = \text{質点の持つエネルギー} + \text{定数}$$

と解釈される．通常、エネルギーを定義する場合、その原点をどこにおくかには任意性があった．しかし Einstein は上記の定数を 0 とおいた．その結果、エネルギーと運動量を一組として、4 次元ベクトル p^μ にまとめられることになった．Einstein によるこの定義の妥当性は、のちに実験により確認された．

以上まとめると

$$\begin{cases} \vec{p} &= \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-(\vec{v}/c)^2}} = \text{質点の運動量} \\ cp^0 &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-(\vec{v}/c)^2}} = W = \text{質点のエネルギー} \end{cases} \quad (6.24)$$

となる．

前述の式で特に速度 $\vec{v} = 0$ の場合、運動量 $\vec{p} = 0$ だが、エネルギー W は mc^2 となる．これを質量 m の質点の静止エネルギー (rest energy) という．

6.3.2 4 元運動量と質量

恒等式

$$u_\mu u^\mu = -c^2 \quad (6.25)$$

から

$$p_\mu p^\mu = -(mc)^2 \quad (6.26)$$

が成り立つ．これは質量の定義式とみなせる．未知の粒子の質量を求めるのに使うことができる．

これからエネルギー W と運動量 $\vec{p}$ の間の関係が導かれる．

$$W = c\sqrt{(\vec{p})^2 + (mc)^2} \quad (6.27)$$

特に質点の速さが光速より十分小さい場合 $|\vec{v}| \ll c$ では

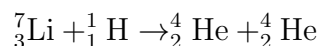
$$W = mc^2 + \frac{1}{2m}(\vec{p})^2 + \dots$$

となる．右辺第 1 項は静止エネルギー、第 2 項は Newton の運動エネルギーにあたる．

6.3.3 実験事実

Cockroft-Walton の実験 (1932)

Cockroft¹ と Walton² は直流高電圧加速器で陽子を加速してリチウムの原子に当てたところ、2 個の α 粒子 (ヘリウム原子核) が飛び出す反応



がおこった。

α 粒子の運動エネルギーはほぼ 8.6MeV であった。

質量減少

$$\Delta M = 7.014368 + 1.007277 - 2 \times 4.001506 = 0.018633(\text{原子質量単位})$$

これにたいして

$$\Delta Mc^2 = 0.018633 \times 931.48 = 17.3(\text{MeV})$$

ところで

$$2 \times 8.6 = 17.2(\text{MeV})$$

両者は互いに良く一致しており、Einstein の関係式を実験的に支持している。

電子対の生成消滅

電子の質量は $9.1093826 \times 10^{-31}\text{kg}$ で、エネルギーに換算すると 511 keV である。陽電子 (ポジトロン positron) は電子と同じ質量で反対の電荷を持つ反粒子である (理論は Dirac³(1928)、実験は Anderson⁴(1932))

陽電子は電子は対消滅して 2 個の γ 線を出す。

¹John Douglas Cockcroft (1897-1967) イギリスの物理学者。1951 年ノーベル物理学賞。

²Ernest Walton (1903-1995) アイルランドの物理学者。1951 年ノーベル物理学賞。

³Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984) イギリスの理論物理学者。1933 年ノーベル物理学賞。

⁴Carl David Anderson (1905-1991) アメリカの物理学者。1936 年ノーベル物理学賞受賞。

第7章 相対論的電磁気学

電磁場の Maxwell の方程式は特別な解釈なしに、そのまま相対性理論の枠組で書き直すことができる。

7.1 真空中の Maxwell の方程式

この節ではまず真空中の Maxwell の方程式を復習してみよう。これは真空中に点電荷がいくつかある場合の電磁気学にあたる。電荷密度を ρ 、電流密度を $\vec{j}$ とすると Maxwell の方程式はつぎのようにあらわされる。

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times \vec{E} = 0 \quad (7.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad (7.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \quad (7.4)$$

ここで $\vec{D}, \vec{E}, \vec{B}, \vec{H}$ はそれぞれ電束密度、電場の強さ、磁束密度、磁場の強さを表す。真空中では

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \quad (7.5)$$

という関係がある。 ϵ_0, μ_0 はそれぞれ真空の誘電率、および透磁率である。両者の間には次の関係がある。

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

c は真空中の光速度である。

7.1.1 ポテンシャルと波動方程式

式 (7.1),(7.2) から $\vec{B}, \vec{E}$ はポテンシャル $\vec{A}, \phi$ を使って次の形に表される .

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi \quad (7.6)$$

ここで、ベクトル解析の公式

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{V}) = 0 \quad (\vec{V} \text{ は任意の 3 次元ベクトル場})$$

および

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (f \text{ は任意のスカラー場})$$

を使った .

(7.6) を Maxwell の方程式 (7.3),(7.4) に代入し、ベクトル解析の公式

$$\nabla \times \nabla \times \vec{V} = \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) - \nabla^2 \vec{V}$$

を使うと、

$$\square \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.7)$$

$$\square \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (7.8)$$

(ここで $\square$ は (5.54) で定義した微分演算子) となる。ただし条件

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (7.9)$$

が必要である .

7.1.2 Lorentz 条件

ここで、方程式 (7.7),(7.8) の解で、さらに (7.9) という条件を満たすものが存在し得るか否か、つまり (7.7),(7.8) と条件 (7.9) が両立可能か、確認してみよう . まず (7.7),(7.8) から

$$\square \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \left(\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad (7.10)$$

となる。この右辺は元の Maxwell 方程式から導かれるように

$$\nabla \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (7.11)$$

となる。したがって

$$\square \left(\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad (7.12)$$

つまり、(7.7),(7.8) と (7.9) は両立する．なお (7.11) は電荷の保存則を示す方程式である．条件 (7.9) は Lorentz 条件と呼ばれる．Lorentz 条件は以下で述べるポテンシャルの不定性 (ゲージ変換) に制限を付ける．

7.1.3 ゲージ変換

実は、物理的に観測可能な電磁場 $\vec{B}, \vec{E}$ がわかっている、関係式 (7.6) から、ポテンシャル $\vec{A}, \phi$ は一意的に決まるわけではない．これを示すため、一組の $\vec{A}, \phi$ から

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \lambda, \quad \phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \quad (7.13)$$

という別の一組 $\vec{A}', \phi'$ を作ってみる．ここで $\lambda(\vec{x}, t)$ は $(\vec{x}, t)$ の任意の関数でかまわない．この $\vec{A}', \phi'$ を (7.6) に代入してみると

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{A}' &= \nabla \times \vec{A} = \vec{B}, \\ -\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} - \nabla \phi' &= -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi = \vec{E} \end{aligned} \quad (7.14)$$

となる．つまり与えられた $\vec{B}, \vec{E}$ を作り出すポテンシャルは $\vec{A}, \phi$ に限らない．任意の λ を用いて作った別の $\vec{A}', \phi'$ も同じ $\vec{B}, \vec{E}$ を再現する． $\vec{A}, \phi$ のかわりに $\vec{A}', \phi'$ に移ることをゲージ変換 (gauge transformation) という．観測可能な量 $\vec{B}, \vec{E}$ はゲージ変換をしても、その値が不変である．

7.1.4 ゲージ変換と Lorentz 条件

ゲージ変換の不定性を利用すると、ある $\vec{A}, \phi$ が Lorentz 条件を満たさなくても λ をうまく選べば $\vec{A}', \phi'$ が Lorentz 条件を満たすようにできる．つまり

$$0 = \nabla \cdot \vec{A}' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = \square \lambda + \nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (7.15)$$

が成立するような λ を使ってゲージ変換すれば Lorentz 条件が満たされる．

7.2 Maxwell の方程式の相対論的書き替え

前節で求めたいろいろな式をテンソルで書きかえ、相対性原理を満たしていることを確認しよう。

7.2.1 電荷保存則

まず電流の連続方程式 (7.11) から始める。

$$j^1 = j_x, j^2 = j_y, j^3 = j_z, j^0 = c\rho \quad (7.16)$$

とすると、(7.11) はある慣性系 S において

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (7.17)$$

となる (ここで $\partial_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$)。次に j^μ が反変ベクトルかどうか、確認しよう。ところで (実験事実から) 電荷の保存則は、どの慣性系でも成立する。つまり他の慣性系 S' において、 $j'^\mu(x')$ を同じように定義すると

$$\partial'_\mu j'^\mu(x') = 0 \quad (7.18)$$

が成り立つ。したがってこれらの式はスカラー量である。一方 ∂_μ は共変ベクトルであるので、相対性原理が成立するためには j^μ は反変ベクトルでなくてはならない。この様な j^μ を 4 元電流 (four-current) という。

7.2.2 ポテンシャル

次にポテンシャルについて考察する。

$$A^0 = \frac{1}{c}\phi, A^1 = A_x, A^2 = A_y, A^3 = A_z, \quad (7.19)$$

とおくと、(7.7), (7.8) は

$$\square A^\lambda = -\mu_0 j^\lambda \quad (7.20)$$

となる。ここで右辺は反変ベクトルである。また $\square$ は (5.54) で定義した、Lorentz 変換しても不変な微分演算子である。したがって A^λ は反変ベクトルでなくてはならない。

Lorentz 条件 (7.9) はスカラーの形になり、

$$\partial_\lambda A^\lambda = 0 \quad (7.21)$$

となる。

ゲージ変換もテンソル形式に表現できる．まず $A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu$ を導入する．これを使うとゲージ変換は

$$A_\mu \rightarrow \bar{A}_\mu + \partial_\mu \lambda \quad (7.22)$$

と表すことができる．ここで λ は $\square\lambda = 0$ を満たす 4 次元スカラー場である．ゲージ変換後の $\bar{A}_\mu$ も元の A_μ と同様に共変ベクトルである．なお A^μ, A_μ をいずれも 4 元ポテンシャル (four-potential) という。

7.2.3 電磁場 $\vec{B}, \vec{E}$

さて $\vec{B}, \vec{E}$ をテンソル形式に表そう．ここで反対称 2 階共変テンソル $f_{\mu\nu}$ を

$$f_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -f_{\nu\mu} \quad (7.23)$$

で定義する．すると $f_{\mu\nu}$ と $\vec{B}, \vec{E}$ の間には

$$\begin{pmatrix} f_{00} & f_{01} & f_{02} & f_{03} \\ f_{10} & f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{20} & f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{30} & f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{c}E_x & -\frac{1}{c}E_y & -\frac{1}{c}E_z \\ \frac{1}{c}E_x & 0 & B_z & -B_y \\ \frac{1}{c}E_y & -B_z & 0 & B_x \\ \frac{1}{c}E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7.24)$$

という等式が成り立つ．

なおゲージ変換で $f_{\mu\nu}$ の値は不変である．

$$f_{\mu\nu} \rightarrow \bar{f}_{\mu\nu} = \partial_\mu \bar{A}_\nu - \partial_\nu \bar{A}_\mu = f_{\mu\nu} \quad (7.25)$$

ついでに $f^{\mu\nu}$ を $\vec{B}, \vec{E}$ であらわすと

$$\begin{pmatrix} f^{00} & f^{01} & f^{02} & f^{03} \\ f^{10} & f^{11} & f^{12} & f^{13} \\ f^{20} & f^{21} & f^{22} & f^{23} \\ f^{30} & f^{31} & f^{32} & f^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z \\ -\frac{1}{c}E_x & 0 & B_z & -B_y \\ -\frac{1}{c}E_y & -B_z & 0 & B_x \\ -\frac{1}{c}E_z & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7.26)$$

7.2.4 まとめ

結局 Maxwell の方程式は (7.20) となり、これに Lorentz 条件 (7.21) が付け加わる。

7.3 Maxwell の方程式の相対論的書き替え (II)

前節では 4 元ポテンシャルを使って電磁場の方程式を相対論的に書き換えた。ここではポテンシャルを使わないで Maxwell 方程式の相対論的書き換えを試みよう。まず反対称テンソル $f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu}$ を (7.24) で直接 $\vec{B}, \vec{E}$ を使い定義する。他に 4 元電流を (7.16) で定義する。

すると Maxwell の方程式のうち (7.3), (7.4) は

$$\partial_\nu f^{\lambda\nu} = \mu_0 j^\lambda \quad (7.27)$$

となる。またのこりの (7.1) (7.2) は

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} = 0 \quad (7.28)$$

となる。

式 (7.28) は一見 $64 = 4 \times 4 \times 4$ 個の方程式のように見える。しかしこれらの大部分は恒等式で、独立な方程式は以下で示すように 4 個のみである。今 (7.28) の左辺を

$$F_{\lambda\mu\nu} \equiv \partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu} \quad (7.29)$$

とおくと、 $f_{\mu\nu}$ が反対称テンソルであることを使うと $F_{\lambda\mu\nu}$ は完全反対称の 3 階共変テンソルであることが示せる。したがって λ, μ, ν の添字のうちどれか 2 個の添字が一致すれば $F = 0$ となる。また、 λ, μ, ν の順序だけが異なるものは、符号をのぞけば、値が等しい。まとめると $F_{\lambda\mu\nu}$ のうち独立なものは $F_{123}, F_{012}, F_{023}, F_{031}$ の 4 個である。例えば $F_{123} = 0$ を具体的に書けば

$$0 = F_{123} = \partial_1 f_{23} + \partial_2 f_{31} + \partial_3 f_{12} = \nabla \cdot \vec{B} \quad (7.30)$$

これは Maxwell の方程式の (7.1) である。残りの式も同様にしてでる。

7.3.1 電磁場のエネルギー運動量テンソル

電磁場のエネルギー運動量テンソルについて述べよう。(7.27) の両辺に $f_{\lambda\rho}$ をかけると左辺 (LHS) は

$$LHS = f_{\lambda\rho} \partial_\nu f^{\lambda\nu} = \partial_\nu (f_{\lambda\rho} f^{\lambda\nu}) - f^{\lambda\nu} \partial_\nu f_{\lambda\rho} \quad (7.31)$$

第2項は $f^{\lambda\nu} = -f^{\nu\lambda}$ ということをつかうと

$$\begin{aligned} -f^{\lambda\nu} \partial_\nu f_{\lambda\rho} &= -\frac{1}{2} f^{\lambda\nu} (\partial_\nu f_{\lambda\rho} - \partial_\lambda f_{\nu\rho}) \\ &= -\frac{1}{2} f^{\lambda\nu} (\partial_\nu f_{\lambda\rho} + \partial_\lambda f_{\rho\nu} + \partial_\rho f_{\nu\lambda}) + \frac{1}{2} f^{\lambda\nu} \partial_\rho f_{\nu\lambda} \end{aligned} \quad (7.32)$$

さらに関係式 (7.28) をつかうと、

$$-f^{\lambda\nu} \partial_\nu f_{\lambda\rho} = -\frac{1}{4} \partial_\rho (f^{\lambda\nu} f_{\lambda\nu}) \quad (7.33)$$

この式の添字を変えと、

$$LHS = \partial_\nu \left(f^{\lambda\nu} f_{\lambda\rho} - \frac{1}{4} \delta_\rho^\nu f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) \quad (7.34)$$

結局

$$\partial_\nu \left(f^{\lambda\nu} f_{\lambda\rho} - \frac{1}{4} \delta_\rho^\nu f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) = \mu_0 j^\lambda f_{\lambda\rho} \quad (7.35)$$

ここで、

$$T_\rho^\nu \equiv -\frac{1}{\mu_0} \left(f^{\lambda\nu} f_{\lambda\rho} - \frac{1}{4} \delta_\rho^\nu f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) \quad (7.36)$$

とすると、

$$\partial_\nu T_\rho^\nu = f_{\rho\lambda} j^\lambda \quad (7.37)$$

となる。

さらに

$$T^{\nu\mu} = \eta^{\rho\mu} T_\rho^\nu = -\frac{1}{\mu_0} \left(\eta_{\lambda\sigma} f^{\lambda\nu} f^{\sigma\mu} - \frac{1}{4} \eta^{\nu\mu} f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) = T^{\mu\nu} \quad (7.38)$$

と書き直し、 $T^{\nu\mu}$ の各成分を $\vec{B}, \vec{E}$ で表すと

$$\begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w & -cg_x & -cg_y & -cg_z \\ -\frac{1}{c}S_x & M_{xx} & M_{xy} & M_{xz} \\ -\frac{1}{c}S_y & M_{yx} & M_{yy} & M_{yz} \\ -\frac{1}{c}S_z & M_{zx} & M_{zy} & M_{zz} \end{pmatrix} \quad (7.39)$$

ここで、

$$\begin{aligned} w &= \frac{1}{2}(\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) = \text{電磁場のエネルギー密度} \\ \vec{g} &= \frac{1}{c^2}(\vec{E} \times \vec{H}) = \text{電磁場の運動量密度} \\ \vec{S} &= (\vec{E} \times \vec{H}) = \text{電磁場のエネルギーの流れの密度} \end{aligned} \quad (7.40)$$

なお、 $\vec{S}$ は Poynting vector ともよばれる。また、 M は Maxwell の応力テンソルと呼ばれるもので、

$$M_{ik} = \epsilon_0 E_i E_k + \mu_0 H_i H_k - \frac{1}{2} \delta_{ik} (\vec{D} \cdot \vec{E} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad (7.41)$$

である。 $T^{\mu\nu}$ を電磁場のエネルギー運動量テンソル (energy momentum tensor) という。

7.3.2 電磁場のエネルギー、運動量保存則

(7.37) は (7.39) を使って書き直すと

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \nabla \cdot \vec{S} + (\vec{E} \cdot \vec{j}) \quad (7.42)$$

$$\frac{\partial g_k}{\partial t} = \sum_{l=1}^3 \partial_l M_{lk} - (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})_k \quad (k = 1, 2, 3) \quad (7.43)$$

となる。ある時刻 t で 3 次元空間の領域 V で積分し、Gauss の定理を使うと、

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V w d^3x = \int_F \vec{S} \cdot d\vec{\sigma} + \int_V (\vec{E} \cdot \vec{j}) d^3x \quad (7.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V g_k d^3x = \sum_{l=1}^3 \int_F M_{lk} d\sigma_l - \int_V (\rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B})_k d^3x \quad (k = 1, 2, 3) \quad (7.45)$$

ここで領域 V の表面を F 、 F 上の面積素片を $d\sigma$ 、その点での外向きの単位法線ベクトルを $\vec{n}$ 、 $d\vec{\sigma} \equiv \vec{n}d\sigma$ とした。(7.44) の右辺第 1 項は表面 F から単位時間中に逃げ出すエネルギー量、第 2 項は単位時間中に V の中にある電荷に電場が与える仕事を示す。したがって左辺は V の中の電磁場のエネルギーの減少量を表す。同様に (7.45) の右辺第 2 項は単位時間

中に V の中にある電荷、電流に電磁場が与える力の反作用、つまり電磁場が電荷から受ける力を示し、右辺第 1 項は表面 F を通して V の外側にある電磁場が V に与える電磁的張力を示す。したがって左辺は V の中の電磁場の運動量の時間的増加率を表す。

もし $\rho = 0, \vec{j} = 0$ で、かつ遠方で電磁場が十分早く 0 になる場合は $V \rightarrow \infty$ で表面積分の寄与はなくなる。したがって

$$P_0 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} T_{00} d^3x = - \int_{-\infty}^{\infty} w d^3x \quad (7.46)$$

$$P_k \equiv \int_{-\infty}^{\infty} T_{0k} d^3x = c \int_{-\infty}^{\infty} g_k d^3x \quad (k = 1, 2, 3) \quad (7.47)$$

はいずれも時間変化しない。これは電磁場のエネルギー、運動量の保存則をあらわす。またこのように定義した P_μ は 4 次元共変ベクトルである。

さらに荷電粒子の運動 ($\rho \neq 0, \vec{j} \neq 0$) を考える際に、荷電粒子だけではエネルギー、運動量の保存則はなりたたず、上記のように定義した電磁場のエネルギー、運動量 P_μ と合計した全体でエネルギー、運動量の保存則が成立する。この事実は、(遠隔作用にたいして) 近接作用論を強く支持し、電磁場を物理的実体とみなす根拠となる。