数値計算法概論：No.10

1　ニュートン・ラフソン法 (その 2)

1.1　2 次収束

ニュートン法は根 $(x_s; f(x_s) = 0)$ に十分近く、また根での微係数が有限の時 $(f'(x_s) \neq 0)$ には極めて収束が早い。実際根の近くで x_s から微小距離 ϵ 離れた点で Taylor 展開すると、関数と導関数は近似的に

$$
\begin{aligned}
f(x_s + \epsilon) &= f(x_s) + \epsilon f'(x_s) + \frac{\epsilon^2}{2} f''(x_s) + \cdots && (1) \\
f'(x_s + \epsilon) &= f'(x_s) + \epsilon f''(x_s) + \cdots && (2)
\end{aligned}
$$

で表される。これらを $\epsilon_i \equiv x_i - x_s$ として Newton-Raphson の公式

$$
x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \tag{3}
$$

に代入し、$f(x_s) = 0$ を使うと、

$$
\epsilon_{i+1} \approx -\epsilon_i^2 \frac{f''(x_s)}{2f'(x_s)} \tag{4}
$$

となるので、2 次収束で極めて早く収束する。

1.2　重根近くでの収束

ところが、$f(x_s) = 0$ の根のところで、$f'(x_s) = 0$ となる場合には収束が遅くなる。先の節で述べたのと同様にして評価すると、$f''(x_s) \neq 0$(2 重根に相当) では、

$$
\epsilon_{i+1} \approx \left(1 - \frac{1}{2}\right) \epsilon_i \tag{5}
$$

$f(x_s) = f'(x_s) = f''(x_s) = 0,\ f'''(x_s) \neq 0$ （3 重根）では

$$
\epsilon_{i+1} \approx \left(1 - \frac{1}{3}\right) \epsilon_i \tag{6}
$$

といった 1 次収束となり、収束が遅くなる。

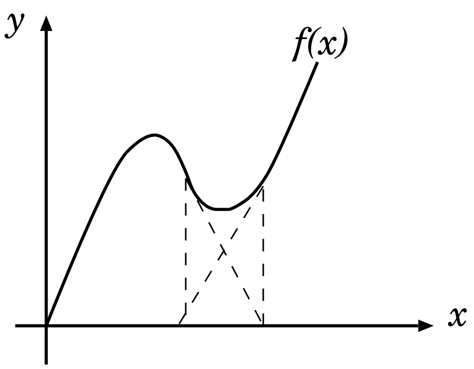
2　プログラム

前回のプログラムでは、ニュートン法が収束せず無限ルーチンに入った場合の対策がなされていなかった。繰返しの回数を記録し、収束しない場合でも一定回数の繰返しで計算を終了し、収束しなかったことを報告するようにプログラムを改良してみよ。

3　課題

$$f(x) = x((x-a)^2 + b) \qquad (a \neq 0) \tag{7}$$

という 3 次方程式を考える。$f(x) = 0$ は自明な解 $x = 0$ 以外にも解がある。これらを



ニュートン法で求め、収束性を議論せよ。

- $b < 0$: 3 つの実数解がある。2 次収束となることを確認せよ。
- $b = 0$: $x = a$ が重根となる。これが 1 次収束となることを確かめよ。
- $b > 0$: $x = 0$ のみが解である。ニュートン法は初期値によっては解が収束しない (非常に遅い) ことを確かめよ。

3.1　レポート問題

上記の課題と、自分で適当に選んだ関数についてニュートン法で議論せよ。1 次収束、2 次収束などについても調べること。

提出期限は 7 月 9 日まで。