数値計算法概論：No.10

1　ニュートン・ラフソン法その2

1.1　2次収束

ニュートン法は根 $x_s(f(x_s)=0)$ に十分近く、また根での微係数が有限の時 $(f'(x_s)\neq 0)$ 極めて収束が早い。実際根の近くで x_s から微小距離 ϵ 離れた点で Taylor 展開すると、関数と導関数は近似的に

$$f(x_s+\epsilon) = f(x_s)+\epsilon f'(x_s)+\frac{\epsilon^2}{2}f''(x_s)+\cdots \tag{1}$$

$$f'(x_s+\epsilon) = f'(x_s)+\epsilon f''(x_s)+\cdots \tag{2}$$

で表される。これを Newton-Raphson の公式

$$x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_{i+1})} \tag{3}$$

に代入し、$f(x_s)=0$ と言うことを利用すると、

$$\epsilon_{i+1}\approx\epsilon_i^2\frac{f''(x_s)}{2f'(x_s)} \tag{4}$$

ということになり、2次収束で極めて早く収束する。

1.2　重根近くでの収束

ところが、$f(x_s)=0$ の根のところで、$f'(x_s)=0$ となる場合には収束が遅くなる。先の節で述べたのと同様にして評価すると、$f''(x_s)\neq 0(2$ 重根に相当$)$ では、

$$\epsilon_{i+1}\approx\left(1-\frac{1}{2}\right)\epsilon_i \tag{5}$$

$f(x_s)=f'(x_s)=f''(x_s)=0,\ f'''(x_s)\neq 0$（3重根）では

$$\epsilon_{i+1}\approx\left(1-\frac{1}{3}\right)\epsilon_i \tag{6}$$

と言った1次収束となり、収束が遅くなる。

2 Fortran

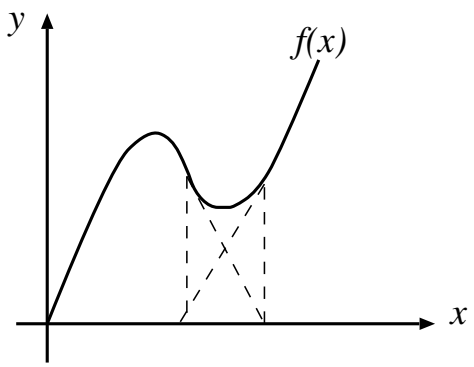
2.1 前回の改良

前回のプログラムでは無限ルーチンに入った場合の対策がなされていなかった。繰返しの回数を記録し、収束しない場合でも一定回数の繰返しで計算終了し、収束しなかったことを報告するようにプログラムを改良してみよ。

3 課題

$$f(x) = x((x-a)^2 + b) \qquad (a \neq 0) \tag{7}$$

という 3 次方程式を考える。$f(x) = 0$ は自明な解 $x = 0$ 以外にも解がある。これらを



ニュートン法で求め、収束性を議論せよ。

- $b < 0$: 3 つの実数解がある。2 次収束となることを確認せよ。
- $b = 0$: $x = a$ が重根となる。これが 1 次収束となることを確かめよ。
- $b > 0$: $x = 0$ のみが解である。ニュートン法は初期値によっては解が収束しない (非常に遅い) ことを確かめよ。

<u>レポート問題</u>

上記の課題と、自分で適当に選んだ関数についてニュートン法で議論せよ。上記課題で $b > 0$ 以外で解が求まらないことがあり得るか？

提出期限は 7 月 10 日まで