

数値計算法概論 : No.10

1 ニュートン・ラフソン法 (その2)

1.1 2次収束

ニュートン法は根 ($x_s; f(x_s) = 0$) に十分近く、また根での微係数が有限の時 ($f'(x_s) \neq 0$) には極めて収束が早い。実際根の近くで x_s から微小距離 ϵ 離れた点で Taylor 展開すると、関数と導関数は近似的に

$$f(x_s + \epsilon) = f(x_s) + \epsilon f'(x_s) + \frac{\epsilon^2}{2} f''(x_s) + \dots \quad (1)$$

$$f'(x_s + \epsilon) = f'(x_s) + \epsilon f''(x_s) + \dots \quad (2)$$

で表される。これらを $\epsilon_i \equiv x_i - x_s$ として Newton-Raphson の公式

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (3)$$

に代入し、 $f(x_s) = 0$ を使って右边を $O(\epsilon_i^2)$ まで展開すると

$$\epsilon_{i+1} \approx \epsilon_i^2 \frac{f''(x_s)}{2f'(x_s)} \quad (4)$$

となるので、2次収束で極めて早く収束する。

1.2 重根近くでの収束

ところが、 $f(x_s) = 0$ の根のところで、 $f'(x_s) = 0$ となる場合には収束が遅くなる。先の節で述べたのと同様にして評価すると、 $f''(x_s) \neq 0$ (2重根に相当) では、

$$\epsilon_{i+1} \approx \left(1 - \frac{1}{2}\right) \epsilon_i \quad (5)$$

$f(x_s) = f'(x_s) = f''(x_s) = 0, f'''(x_s) \neq 0$ (3重根) では

$$\epsilon_{i+1} \approx \left(1 - \frac{1}{3}\right) \epsilon_i \quad (6)$$

といった1次収束となり、収束が遅くなる。

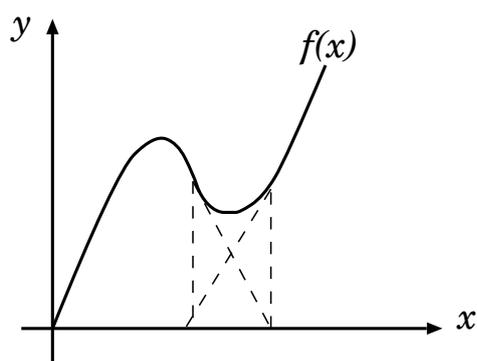
2 プログラム

前回のプログラムでは、ニュートン法が収束せず無限ループに入った場合の対策がなされていなかった。繰返しの回数を記録し、収束しない場合でも一定回数の繰返しで計算を終了し、収束しなかったことを報告するようにプログラムを改良してみよ。

3 課題

$$f(x) = x((x - a)^2 + b) \quad (a \neq 0) \quad (7)$$

という3次方程式を考える。 $f(x) = 0$ は自明な解 $x = 0$ 以外にも解がある。これらを



ニュートン法で求め、収束性を議論せよ。

- $b < 0$: 3つの実数解がある。2次収束となることを確認せよ。
- $b = 0$: $x = a$ が重根となる。これが1次収束となることを確かめよ。
- $b > 0$: $x = 0$ のみが解である。ニュートン法は初期値によっては解が収束しない(非常に遅い)ことを確かめよ。

3.1 レポート問題

上記の課題と、自分で適当に選んだ関数についてニュートン法で議論せよ。1次収束、2次収束などについても調べること。

提出期限は7月7日まで。