

# 2016 年ノーベル物理学賞解説セミナー Kosterlitz-Thouless 転移と Haldane 予想

野村 清英

Dept. of Phys., Kyushu Univ.

2016 年 11 月 29 日

# 序論

2016 年度ノーベル物理学賞受賞者



Figure: 左 D.J.Thouless ; 中 F . D.M.Haldane ; 右 J.M.Kosterlitz

“TOPOLOGICAL PHASE TRANSITIONS AND TOPOLOGICAL PHASES OF MATTER”

# 序論

相転移：(オーソドックスな理解)

- ▶ 秩序パラメーターが重要
- ▶ 低温では長距離秩序 (自発的対称性の破れ) , 高温で秩序なし .
- ▶ ユニバーサリティ
- ▶ 相転移には境界条件は重要では無い .

境界項

- ▶ 解析力学や場の理論で , 部分積分で境界項はほとんどの場合あっさり無視
- ▶ 例外、(Dirac, t'Hooft-Polyakov) モノポール、

# BKT 転移

J. M. Kosterlitz, and D.J. Thouless: *Journal of Physics C* **6** p. 1181-1203 (1973).

- ▶ 長距離秩序が全くないのに、相転移が起きることがある。  
2次元 XY 模型，超伝導薄膜，2次元結晶（超伝導薄膜は複素数のオーダーパラメーター  $U(1)$  だが，XY モデル  $O(2)$  と同じく連続的対称性）
- ▶ 注：2次元以下で連続的対称性の系で長距離秩序が無い証明 (Mermin-Wagner (1966))
- ▶ But, 2次元 XY 模型の低温展開では，相関関数がべき乗的で，相関距離発散 ← 2次元のグリーン関数は対数
- ▶ 高温展開（相関距離有限）とは矛盾
- ▶ 見落とし，トポロジカルな励起（渦）
- ▶ Berezinskii: *Sov. Phys. JETP*, **32**, p.493 (1971); *Sov. Phys. JETP*, **34**, p.610 (1972)  
の寄与も大事だが、ノーベル賞を出すことが不可能だった。

# BKT 転移と繰り込み群

Kosterlitz (1973)

繰り込み群

- ▶ Kosterlitz-Thouless (1973) でも繰り込み群の計算をしているが、間違っていた
- ▶ Kosterlitz (1974) で繰り込み群の正確な計算  
J. M. Kosterlitz: J. Phys. C, 7, pp. 1046-1060 (1974).

- ▶ 近藤効果の繰り込み群との対比

Anderson-Yuval :Phys. Rev. Lett, 23, (1969) 89 ; Anderson-Yuval-Hamann  
:Phys. Rev. B, 1, (1970) 4464

近藤効果の問題を 2 次元古典クーロンガスに帰着させ、繰り込み群を計算

うーん、繰り込み群の計算をノーベル賞の理由に含まなかったのはこのためか。

# Haldane 予想

F.D.M. Haldane: Phys. Letters A, **93**, p.464 (1983); Physical Review Letters, **50**, p.1153 (1983)

- ▶ 1950-1970 年代  
1次元スピン鎖で  $S=1/2$  の厳密解，ボゾン化の方法  
エネルギーギャップは無く，相関関数は冪的挙動  
→  
この結果はあらゆるスピンの正しいと思われていた．
- ▶ 1次元ハイゼンベルクスピン鎖で整数と半整数スピンの違い  
整数スピンでは，エネルギーギャップあり，相関関数は指数関数的挙動
- ▶ 部分積分で境界項をよく調べると，無視できないことがある  
(トポロジカル項)．  
この項は，整数スピンと半整数スピンでは影響が違う．
- ▶ 境界に特徴 (エッジ状態)

# 量子ホール効果と TKNN

D. J. Thouless, Mahito Kohmoto, M.P. Nightingale, and M Den Nijs: Physical Review Letters, 49(6):405, (1982)

量子ホール効果の説明，トポロジカルなチャーン数  
磁場が無い場合にも応用可能な形式 (スピンホール効果など) ，

# トポロジーについて

1. 何らかの形を連続変形しても保たれる性質に焦点
2. 例 1. マグカップとドーナツの動画
3. 例 2. 回転数—(winding number)

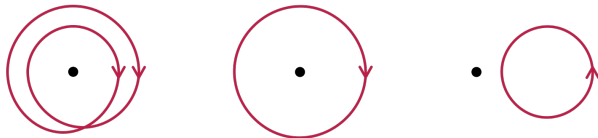


Figure: 左:巻数 -2, 中: -1, 右: 0

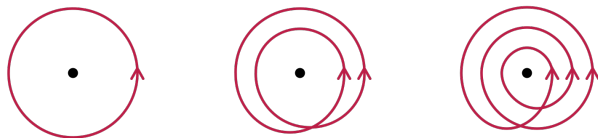


Figure: 左:1, 中: 2, 右: 3



# トポロジーについて2

## 3. 例 2. 回転数の続き (数学や物理での例)

### 3.1 微分幾何学 (ベクトル解析)

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C \left( \frac{x}{r^2} dy - \frac{y}{r^2} dx \right) \quad (1)$$

### 3.2 複素関数論 (コーシーの積分定理)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z - a} \quad (2)$$

### 3.3 磁束の量子化 (超伝導), 渦の量子化 (超流動)

## 2次元古典XYモデル

XYモデル:

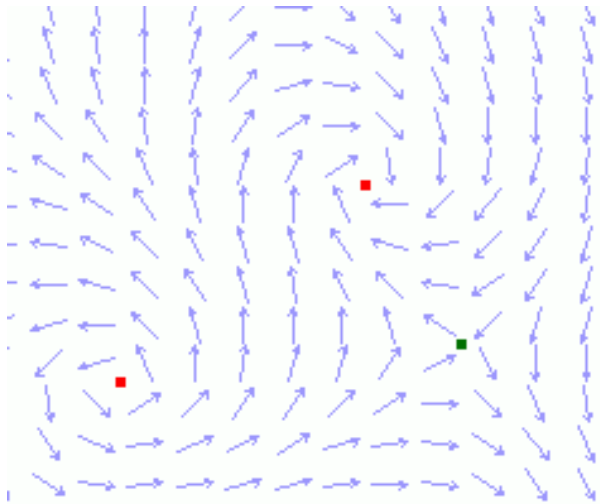
$$H_{XY} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (3)$$

(ここで,  $\theta_j (0 \leq \theta_j < 2\pi)$  は  $\mathbf{S}_j \equiv (\cos \theta_j, \sin \theta_j)$  で定義した. さらに和  $\langle i, j \rangle$  は最近接格子間でとっている)

これは, 薄膜超流動や超伝導のモデルでもある.

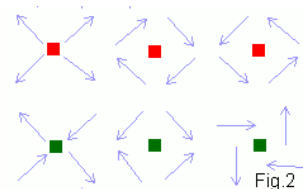
## 2次元XYモデルの渦

2次元XYモデルでの励起では，トポロジカルな渦が特徴



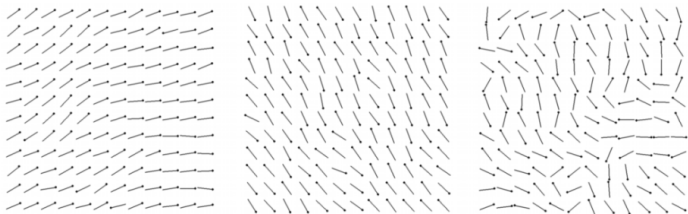
## 2次元XYモデルの渦

渦 (vortex) と反渦 (anti-vortex)



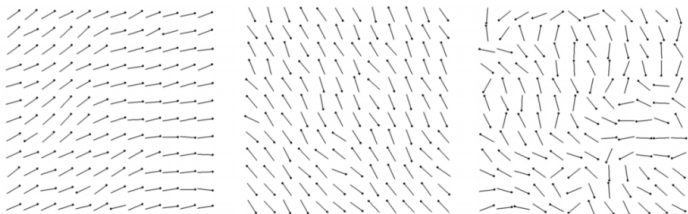
1. 渦  
特異点のまわりを実格子で1周する時，XY スピンが同じ向きに回転する場合
2. 反渦  
特異点のまわりを実格子で1周する時，XY スピンが逆向きに回転する場合
3. 渦や反渦の考えを一般化して，渦度（整数）が定義できる
4. 全てのスピンを同じ角度変化させても，渦度は変わらない

## 2次元XYモデルの BKT 転移



1. 低温相  
スピンのほぼ揃っている
2. 高温相  
スピン秩序は無い,
3. 注意!  
高温相でも低温相でも長距離秩序は無い.

## 2次元XYモデルのBKT転移



1. 低温相  
スピンの向きがほぼ揃っている
2. 高温相  
スピン秩序は無い，スピン相関は指数関数的に減衰
3. 注意！  
高温相でも低温相でも，2次元では長距離秩序は無い．  
高温相と低温相の違いは，スピン相関が早く減衰（指数関数的減衰）するか，ゆっくり減衰するか（べき乗的減衰）

# BKT 転移 2

## 1. 従来の相転移

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}') \rangle \approx \begin{cases} c_1 & (T < T_c) \\ c_2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-\eta} & (T = T_c) \\ c_3 \exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\xi(T)) & (T > T_c) \end{cases} \quad (4)$$

1.1 低温では長距離秩序

1.2 高温では秩序はなく，相関関数は指数関数的に減衰．

1.3 臨界温度  $T_c$  ではべき乗的減衰

## 2. 2次元 XY

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}') \rangle \approx \begin{cases} c_1 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-\eta(T)} & (T \leq T_c) \\ c_2 \exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\xi(T)) & (T > T_c) \end{cases} \quad (5)$$

## 低温展開（スピン波近似）

(3) で，隣り合ったスピンの揺らぎが十分小さい場合  
 $\cos(\theta_i - \theta_j) \approx 1 - (\theta_i - \theta_j)^2/2 \approx 1 - (\nabla\theta)^2/2$  と展開できる。  
これをまとめると

$$H = E_0 + \frac{J}{2} \int d^2r (\nabla\theta(\mathbf{r}))^2 \quad (6)$$

( $E_0 = 2JN$  は完全にスピンの揃った場合の基底状態エネルギー)  
分配関数は ( $\beta = 1/(k_B T)$ )

$$Z = \exp(-\beta E_0) \int D[\theta] \exp\left(-\beta \frac{J}{2} \int d^2r (\nabla\theta(\mathbf{r}))^2\right) \quad (7)$$

この場合の Green 関数は  $\nabla^2 \ln(r) = 2\pi\delta(r)$  より

$$\Gamma(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \equiv \langle \theta(\mathbf{r}')\theta(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (8)$$



# 低温展開 (スピン波近似) 2

## ガウス積分とグリーン関数 (一般論)

### 1. 1 変数のガウス積分

$$\begin{aligned} W(h) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \exp\left(-\frac{1}{2}A\theta^2 + ih\theta\right) \\ &= (2\pi/A)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}A^{-1}h^2\right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\therefore \langle \exp(ih\theta) \rangle \equiv \frac{W(h)}{W(0)} = \exp\left(-\frac{1}{2}A^{-1}h^2\right) \quad (10)$$

### 2. $N$ 変数のガウス積分

確率分布関数が  $\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \theta_i A_{i,j} \theta_j\right)$  では

$$\langle \exp\left(i \sum_i h_i \theta_i\right) \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_i (A^{-1})_{i,j} h_j\right) \quad (11)$$

# 低温展開 (スピン波近似) 3

ガウス積分とグリーン関数 (一般論)

## 3. 連続変数

確率分布関数  $\exp(-\frac{1}{2} \int \int \theta(r) A(r, r') \theta(r') d^d r d^d r')$  では

$$\begin{aligned} W(h) &\equiv \langle \exp(i \int h(r) \theta(r) d^d r) \rangle \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \int \int h(r) A^{-1}(r, r') h(r') d^d r d^d r'\right) \end{aligned} \quad (12)$$

ここで  $A^{-1}$  の定義は

$$\int A^{-1}(r, r') A(r', r'') d^d r' = \delta^d(r - r'') \quad (13)$$

## 4. 以上より相関関数とグリーン関数の関係は

$$\langle \theta(\mathbf{r}') \theta(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\delta^2 W(h)}{\delta h(r_1) \delta h(r_2)} = A^{-1}(r_1, r_2) \quad (14)$$

## 低温展開（スピン波近似）4

元の XY 模型での相関関数は

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}') \rangle &= \langle \exp(i(\theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{r}'))) \rangle \\ &= \exp\left(\frac{k_B T}{2\pi J} \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\right) \\ &= \left(\frac{a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right)^{k_B T / 2\pi J}\end{aligned}\tag{15}$$

## 渦度：トポロジカルな励起

スピン波近似では  $-\infty < \theta < \infty$  としていた．また， $\theta$  は1価としていた．

## 渦度：トポロジカルな励起

スピン波近似では  $-\infty < \theta < \infty$  としていた．また， $\theta$  は 1 価としていた．

But,  $\theta = \theta + 2\pi$  の周期性  $\rightarrow$  渦 (トポロジカルな励起)  
渦度  $v$  を次のように定義する

$$v \equiv \frac{1}{2\pi} \oint_C d\mathbf{l} \cdot \nabla\theta(\mathbf{r}) \quad (16)$$

ここで  $S(\mathbf{r})(= \exp(i\theta(\mathbf{r})))$  は一価関数なので  $v = n$  ( $n$ :整数)

## 単一の渦のエネルギー

孤立した単一の渦については,

$$2\pi n = \oint_C dl \nabla \cdot \theta(\mathbf{r}) = 2\pi r |\nabla \theta| \quad (17)$$

なので,  $|\nabla \theta| = n/r$  となる.

単一の渦のエネルギーは,  $|\nabla \theta(\mathbf{r})| = n/r$  より

$$\begin{aligned} E_{\text{vor}} - E_0 &= \frac{J}{2} \int d^2r (\nabla \theta(\mathbf{r}))^2 \\ &= \frac{Jn^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^L r dr \left(\frac{1}{r}\right)^2 = J\pi n^2 \ln \frac{L}{a} \quad (18) \end{aligned}$$

( $L$  はシステムサイズ,  $a$  は格子間隔程度)

つまり, 単一の渦のエネルギーは, サイズ無限大で対数発散

# 渦対

渦 (渦度+1) と反渦 (渦度-1) でペアを作るとエネルギーは有限に収まる  
(全体としての渦度は0なので)

渦対のエネルギーは大体

$$2\pi J \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad (19)$$

( $r$  は渦対の間隔)

低温相ではスピン波近似 + (熱的に励起された) 渦対

温度が上昇すると、渦対が解離して、バラバラな渦になった方がエントロピー的には有利

単一の渦の自由エネルギーは

$$F = E - TS \approx J\pi \ln\left(\frac{L}{a}\right) - k_B T \ln\left(\frac{L^2}{a^2}\right) \quad (20)$$

$T_{KT} \approx J\pi/(2k_B)$  でエネルギーとエントロピーがバランスして相転移



## 渦と双対性

渦による寄与を定量的に扱おう．そのために双対場を導入する．

$$S = \frac{1}{2g} \int (\partial_\mu \theta)^2 d^2x, \quad (\theta \equiv \theta + 2\pi) \quad (21)$$

$\theta$  をスピン波成分  $\theta_{sw}$  と渦の成分  $\theta_{vortex}$  に分離する．

$$\theta(\mathbf{x}) = \theta_{sw}(\mathbf{x}) + \theta_{vortex}(\mathbf{x}) \quad (22)$$

$$\oint d\theta_{sw}(\mathbf{x}) = 0, \quad (23)$$

$$\oint d\theta_{vortex}(\mathbf{x}) = v \quad (v : \text{整数}) \quad (24)$$

渦の変数に対して双対場  $\psi$  を導入

$$\epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \psi = \partial_\mu \theta_{vortex} \quad (25)$$

(複素関数の実部と虚部の関係)

## 渦と双対性

グリーンンの定理を使うと

$$v = \oint d\theta_{vortex}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int \nabla^2 \psi d^2x \quad (26)$$

である。したがって

$$\nabla^2 \psi = -2\pi \sum_j v_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (v_j : \text{整数}) \quad (27)$$

2次元の Green 関数は  $\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x}|$  であるので,

$$\psi(\mathbf{x}) = -2\pi \sum_j v_j \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j| = - \sum_j v_j \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j| \quad (28)$$

元の渦の変数では

$$\theta_{vortex}(\mathbf{x}) = -Im \sum_j v_j \ln(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (29)$$

(複素数を使うと表示が簡便に)

## 2D Coulomb gas

渦どうしの相互作用にたいする Action は

$$S_{vortex} = -\frac{2\pi}{2g} \sum_{i,j} v_i v_j \ln |z_i - z_j| \quad (30)$$

(2次元クーロンガス (対数ポテンシャル))

スピン波成分と渦の成分の両方の Action を考慮して書き換えると, 量子 sine-Gordon 模型の形になる

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g} (\nabla\chi)^2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi\chi}{g}\right) \quad (31)$$

(この表示では,  $-\infty < \chi < \infty$ )

## 繰り込み群

2次元クーロンガスや量子 sine-Gordon 模型は，スケール変換に対して結合定数が変化する (繰り込み) .

スケール変換  $\alpha \rightarrow \alpha' = \alpha \exp(dl) \approx \alpha(1 + dl)$  にたいして，

$$\begin{aligned}\frac{dy_1(l)}{dl} &= -y_2^2(l) \\ \frac{dy_2(l)}{dl} &= -y_1(l)y_2(l)\end{aligned}\tag{32}$$

システムサイズ  $L$  にたいして， $l_0 = \ln L$   
様々な物理量に対数補正 ( $1/\ln L$ )

# 繰り込み群: レベルスペクトロスコピー

対数補正は収束が大変遅いので、数値計算に支障  
単一の物理量の相関ではなく、複数の物理量の相関を用いると対  
数補正を消去することができる。

K. Nomura: J. Phys. A, Vol. 28, pp.5451-5468 (1995); Nomura and A. Kitazawa: J.  
Phys. A: Vol. 31 (1998) pp.7341



# Haldane 予想

## 1次元量子スピンハイゼンベルクモデル

$$H = J \sum_j \mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_{j+1} \quad (33)$$

- ▶ 基底状態は Néel 状態に近いが、長距離秩序は無い。
- ▶ 半整数スピン ( $S=1/2, 3/2, \dots$ ) と整数スピン ( $S=1, 2, \dots$ ) の違い
- ▶ 波数 0 と  $\pi$  のモードが重要

# Haldane 予想:非線形シグマ模型

## 非線形シグマ模型

$$\frac{1}{2g} \int dt dx \left( \frac{1}{v} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - v \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right)$$
$$(\varphi \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \varphi^2 = 1) \quad (34)$$

Wick 回転すると

$$\frac{1}{2g} \int dx^2 (\nabla \varphi)^2 \quad (35)$$

(2次元古典ハイゼンベルクモデルと等価)



# Haldane 予想:非線形シグマ模型

## 非線形シグマ模型

$$\frac{1}{2g} \int dt dx \left( \frac{1}{v} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - v \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right)$$
$$(\varphi \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \varphi^2 = 1) \quad (34)$$

Wick 回転すると

$$\frac{1}{2g} \int dx^2 (\nabla \varphi)^2 \quad (35)$$

(2次元古典ハイゼンベルクモデルと等価)

一見すると, massless(gapless) の自由場のモデルのように見える

# Haldane 予想:非線形シグマ模型

## 非線形シグマ模型

$$\frac{1}{2g} \int dt dx \left( \frac{1}{v} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - v \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right)$$
$$(\varphi \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \varphi^2 = 1) \quad (34)$$

Wick 回転すると

$$\frac{1}{2g} \int dx^2 (\nabla \varphi)^2 \quad (35)$$

(2次元古典ハイゼンベルクモデルと等価)

一見すると, massless(gapless) の自由場のモデルのように見える

But  $\varphi^2 = 1$  という制約のため, エネルギーギャップ生成

## Haldane 予想:非線形シグマ模型 2

### 非線形シグマ模型

- ▶ 繰り込み群
- ▶ インスタントン (後で述べるトポロジカル項と関連)  
低温では無限遠で  $\varphi$  が揃う
  - 平面の無限遠点を同一視して球面とみなせる
  - 球面から球面への写像

## Haldane 予想:非線形シグマ模型 2

### 非線形シグマ模型

- ▶ 繰り込み群
- ▶ インスタントン (後で述べるトポロジカル項と関連)  
低温では無限遠で  $\varphi$  が揃う  
→ 平面の無限遠点を同一視して球面とみなせる  
→ 球面から球面への写像



Figure: これを量子化するとインスタントン (ネタです)

どちらからも gap 生成

## Haldane 予想:非線形シグマ模型 2

### 非線形シグマ模型

- ▶ 繰り込み群
- ▶ インスタントン (後で述べるトポロジカル項と関連)  
低温では無限遠で  $\varphi$  が揃う  
→ 平面の無限遠点を同一視して球面とみなせる  
→ 球面から球面への写像



Figure: これを量子化するとインスタントン (ネタです)

どちらからも gap 生成

元々は 4 次元 Yang-Mills 場 (非可換ゲージ場) の非摂動解を調べるため, 簡略化したものとして 2 次元非線形シグマ模型を導入

## Haldane 予想: ハイゼンベルクから非線形シグマへ

ハイゼンベルクモデルを連続体近似, 波数 0 と  $\pi$  のモードに注目する .

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{2i} &\equiv \frac{1}{2s}(\hat{S}_{2i+1} - \hat{S}_{2i}) \\ \hat{l}_{2i} &\equiv \frac{1}{2a}(\hat{S}_{2i+1} + \hat{S}_{2i})\end{aligned}\quad (36)$$

交換関係は  $a \rightarrow 0, s \rightarrow \infty$  の極限で

$$\begin{aligned}[\hat{l}^a(x), \hat{l}^b(y)] &= i\epsilon^{abc}\hat{l}^c\delta(x-y) \\ [\hat{l}^a(x), \hat{\varphi}^b(y)] &= i\epsilon^{abc}\hat{\varphi}^c\delta(x-y) \\ [\hat{\varphi}^a(x), \hat{\varphi}^b(y)] &= i\epsilon^{abc}\hat{l}^c\frac{a^2}{s^2}\delta(x-y) \rightarrow 0\end{aligned}\quad (37)$$

ここで

$$\delta(x-y) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\delta_{x,y}}{a}$$

## Haldane 予想:ハイゼンベルクから非線形シグマへ2

交換関係以外に，直交関係

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{2i} \cdot \hat{l}_{2i} &= \frac{1}{2s}(\hat{S}_{2i+1} - \hat{S}_{2i}) \cdot \frac{1}{2a}(\hat{S}_{2i+1} + \hat{S}_{2i}) \\ &= \frac{1}{2sa}(\hat{S}_{2i+1}^2 + \hat{S}_{2i+1} \cdot \hat{S}_{2i} - \hat{S}_{2i+1} \cdot \hat{S}_{2i} - \hat{S}_{2i}^2) \\ &= 0\end{aligned}\tag{38}$$

および  $\hat{\varphi}$  はほぼ単位ベクトル

$$\begin{aligned}(\hat{\varphi}_{2i})^2 &= \frac{1}{4s^2}[\hat{S}_{2i}^2 + \hat{S}_{2i+1}^2 - 2\hat{S}_{2i} \cdot \hat{S}_{2i+1}] \\ &= \frac{1}{4s^2}[2\hat{S}_{2i}^2 + 2\hat{S}_{2i+1}^2 - 4a^2(\hat{l}_{2i})^2] \\ &= 1 + 1/s - a^2\hat{l}/s^2\end{aligned}\tag{39}$$

である．

## Haldane 予想:ハイゼンベルクから非線形シグマへ3

$$\hat{S}_{2i} \cdot \hat{S}_{2i+1} = 2a^2 \hat{l}_{2i}^2 + s(s+1) \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_{2i-1} \cdot \hat{S}_{2i} &= -s^2 \hat{\varphi}_{2i-2} \cdot \hat{\varphi}_{2i} \\ &\quad - as \left[ \hat{l}_{2i-2} \cdot \hat{\varphi}_{2i} - \hat{\varphi}_{2i-2} \cdot \hat{l}_{2i} \right] \\ &\quad + a^2 \hat{l}_{2i-2} \cdot \hat{l}_{2i} \\ &\approx a^2 \left( 2s^2 (\hat{\varphi}')^2 - 2s (\hat{l} \cdot \hat{\varphi}' + \hat{\varphi}' \cdot \hat{l}) + 2\hat{l}^2 \right) \\ &\quad - s(s+1) - 2a^2 s^2 (\hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi}')' \end{aligned} \quad (41)$$

(ここで,  $\hat{\varphi}^2 = 1 + 1/s - a\hat{l}^2/s^2$  と,  $\hat{\varphi}''\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}'\hat{\varphi})' - (\hat{\varphi}')^2$  を使った.)



## Haldane 予想:ハイゼンベルクから非線形シグマへ4

$$\hat{H} = \frac{aJ}{2} \int dx [4\hat{l}^2 + 2s^2(\hat{\varphi}')^2 - 2s(\hat{l} \cdot \hat{\varphi}' + \hat{\varphi}' \cdot \hat{l})] \quad (42)$$

書き換えると

$$\hat{H} = \int dx \hat{\mathcal{H}}, \quad (43)$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{v}{2} \left[ g \left( \hat{l} - \frac{\theta}{4\pi} \hat{\varphi}' \right)^2 + \frac{(\hat{\varphi}')^2}{g} \right] \quad (44)$$

ここで ,  $v = 2Jas$ ,  $g = 2/s$ ,  $\theta = 2\pi s$

## Haldane 予想:ハイゼンベルクから非線形シグマへ5

Hamiltonian 密度 (44) はつぎの Lagrangian 密度

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2g} \partial_\mu \hat{\varphi} \partial^\mu \hat{\varphi} + \frac{\theta}{8\pi} \epsilon^{\mu\nu} \hat{\varphi} \cdot (\partial_\mu \hat{\varphi} \times \partial_\nu \hat{\varphi}) \\ &= \frac{1}{2g} (\partial_0 \varphi \partial_0 \varphi - \partial_1 \varphi \partial_1 \varphi) + \frac{\theta}{4\pi} \varphi \cdot (\partial_0 \varphi \times \partial_1 \varphi)\end{aligned}\quad (45)$$

から得られる (簡単のため  $v = 1$  とした)

[証明]

この場合の運動量密度は

$$\mathbf{\Pi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi)} = \frac{1}{g} \partial_0 \varphi + \frac{\theta}{4\pi} (\partial_1 \varphi \times \varphi)\quad (46)$$

ハミルトニアン密度は (次ページ)

## Haldane 予想:ハイゼンベルクから非線形シグマへ6

ハミルトニアン密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &\equiv \partial_0\varphi \cdot \mathbf{\Pi} - \mathcal{L} \\ &= \frac{g}{2} \left( \varphi \times \mathbf{\Pi} - \frac{\theta}{4\pi} (\partial_1\varphi) \right)^2 + \frac{1}{2g} (\partial_1\varphi)^2\end{aligned}\quad (47)$$

ここで  $\hat{l} \equiv \varphi \times \mathbf{\Pi}$  とすると,

$$\hat{H} = \frac{v}{2} \int dx \left[ g \left( \hat{l} - \frac{\theta}{4\pi} \hat{\varphi}' \right)^2 + \frac{(\hat{\varphi}')^2}{g} \right]$$

Q.E.D.

## Haldane 予想:ハイゼンベルクから非線形シグマへ7

得られた Lagrangin 密度を Wick 回転して Euclid 計量に直すと

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2g} \partial_\mu \hat{\varphi} \partial^\mu \hat{\varphi} + \frac{i\theta}{8\pi} \epsilon^{\mu\nu} \hat{\varphi} \cdot (\partial_\mu \hat{\varphi} \times \partial_\nu \hat{\varphi}) \\ &= \frac{1}{2g} (\partial_0 \varphi \partial_0 \varphi - \partial_1 \varphi \partial_1 \varphi) + \frac{\theta}{4\pi} \varphi \cdot (\partial_0 \varphi \times \partial_1 \varphi)\end{aligned}\quad (48)$$

真空期待値は (経路積分の形で)

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left(-\int d^2x \mathcal{L}\right)\quad (49)$$

## Haldane 予想: トポロジカル項

前の結果には，非線形シグマ模型の項 ( $S_0$  とあらかず) に加え，

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \epsilon^{\mu\nu} \hat{\varphi} \cdot (\partial_\mu \hat{\varphi} \times \partial_\nu \hat{\varphi}) \quad (50)$$

がついていた (トポロジカル項) .

この項は整数値をとる .

ユークリッド表示で  $\exp(S_0 + i\theta Q)$  であり， $\theta = 2\pi s$  を考慮すると，

- ▶ 整数スピンではトポロジカル項の寄与は無く，単純な非線形シグマ模型  $\rightarrow$  gapped
- ▶ 半整数スピンではトポロジカル項の寄与で，gapless

## Haldane 予想: トポロジカル項 2

トポロジカル項が整数ということを示す.

$\varphi = (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha)$  と変数変換すると

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{8\pi} \int d^2x \epsilon^{\mu\nu} \hat{\varphi} \cdot (\partial_\mu \hat{\varphi} \times \partial_\nu \hat{\varphi}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^2x \sin \alpha \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \alpha \partial_\nu \beta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \sin \alpha \frac{D(\alpha, \beta)}{D(x_0, x_1)} dx_0 dx_1 \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dS_{\text{int}} \end{aligned} \tag{51}$$

$(\frac{D(\alpha, \beta)}{D(x_0, x_1)})$  はヤコビアン)

結論: 球面から球面への連続写像  $\rightarrow Q$  は整数

# インスタントン

インスタントン：トポロジカル数  $Q$  を固定したときの最小作用解

$$\partial_\mu \varphi + \epsilon_{\mu\nu} (\varphi \times \partial_\nu \varphi) = 0 \quad (52)$$

$\varphi^1 = 1$  を考慮して，次の複素数  $w$  を導入（球面から複素平面へ）

$$w = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{1 + \varphi_3} \quad (53)$$

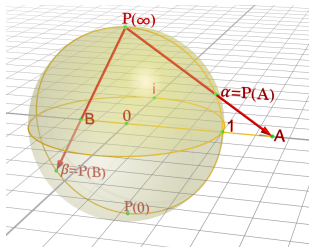


Figure: 球面から複素平面への投影

## インスタントン2

すると (52) は

$$\partial_{\bar{z}} w = 0, \quad (z = x_0 + ix_1) \quad (54)$$

したがってインスタントン解は

$$w(z) = \prod_{j=1}^Q \frac{z - a_j}{z - b_j} \quad (55)$$



# Haldane 予想:半整数スピン

非線形シグマ模型を使った説明では、整数スピンの場合はギャップが生じるのが自然だが、半整数スピンの場合はギャップレスになるのは分かりにくい

他の方法

1.  $S=1/2$

Bethe 仮説による厳密解

2. それ以外の半整数スピン ( $S=3/2, 5/2, \dots$ )

Lieb-Schultz-Mattis

I.Affleck, E.H. Lieb: Lett. Math. Phys, p. 57 (1986)

# Haldane 予想:整数スピン

## Haldane 予想とは独立な検証

1. 数値計算
2. 実験
3. AKLT(Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki)

I. Affleck, T. Kennedy, E.H.Lieb, H.Tasaki: Physical Review Letters. **59**,  
p.799(1987) .

# まとめ

1. トポロジー
  - 1.1 BKT 転移の渦は，円周上のトポロジー
  - 1.2 Haldane 予想は，球面から球面へのトポロジー  
(量子力学の回転と運動量，被覆群)
  - 1.3 この講演では触れなかったが，  
TKNN(Thouless-Kohmoto-Nightingale-denNijs) はトーラス上のトポロジー
2. 格子構造，双対性  
連続なモデルで扱っているが，実は格子構造が重要?(Umklapp 過程)，双対性で十分?
3. トポロジーの性質は摂動に対して安定
4. 関連した発展
  - 4.1 スピンホール効果
  - 4.2 SPTP
  - 4.3 グラフェン
  - 4.4 トポロジカル絶縁体
  - 4.5 トポロジカル半金属

# まとめ2

## 学部生へ

1. 複素関数論  
積分路，リーマン面，分岐線，リーマン球面  
↔ トポロジーとの関連
2. ガウス積分  
統計力学だけでなく，場の量子論 (経路積分) で大事
3. グリーン関数