

物質のトポロジカル現象

(2016年ノーベル賞に関連して)

野村 清英

Dept. of Phys., Kyushu Univ.

2017年8月10日

序論

2016 年度ノーベル物理学賞受賞者



Figure: 左 D.J.Thouless ; 中 F . D.M.Haldane ; 右 J.M.Kosterlitz

“TOPOLOGICAL PHASE TRANSITIONS AND TOPOLOGICAL PHASES OF MATTER”

序論

相転移：(オーソドックスな理解)

- ▶ 秩序パラメーターが重要
- ▶ 低温では長距離秩序(自発的対称性の破れ), 高温で秩序なし.
- ▶ ユニバーサリティ
- ▶ 相転移には境界条件は重要では無い.

境界項

- ▶ 解析力学や場の理論で, 部分積分で境界項はほとんどの場合あっさり無視
- ▶ 例外、(Dirac, t'Hooft-Polyakov) モノポール、

BKT 転移

J. M. Kosterlitz, and D.J. Thouless: *Journal of Physics C* **6** p. 1181-1203 (1973).

- ▶ 長距離秩序が全くないのに、相転移が起きることがある。
2次元 XY 模型, 超伝導薄膜, 2次元結晶 (超伝導薄膜は複素数のオーダーパラメーター $U(1)$ だが, XY モデル $O(2)$ と同じく連続的対称性)
- ▶ 注: 2次元以下で連続的対称性の系で長距離秩序が無い証明 (Mermin-Wagner (1966))
- ▶ But, 2次元 XY 模型の低温展開では, 相関関数がべき乗的で, 相関距離発散 ← 2次元のグリーン関数は対数
- ▶ 高温展開 (相関距離有限) とは矛盾
- ▶ 見落とし, トポロジカルな励起 (渦)
- ▶ Berezinskii: *Sov. Phys. JETP*, **32**, p.493 (1971); *Sov. Phys. JETP*, **34**, p.610 (1972)
の寄与も大事だが、ノーベル賞を出すことが不可能だった。

BKT 転移と繰り込み群

Kosterlitz (1973)

繰り込み群

- ▶ Kosterlitz-Thouless (1973) でも繰り込み群の計算をしているが、間違っていた
- ▶ Kosterlitz (1974) で繰り込み群の正確な計算
J. M. Kosterlitz: J. Phys. C, 7, pp. 1046-1060 (1974).

- ▶ 近藤効果の繰り込み群との対比

Anderson-Yuval :Phys. Rev. Lett, 23, (1969) 89 ; Anderson-Yuval-Hamann
:Phys. Rev. B, 1, (1970) 4464

近藤効果の問題を 2 次元古典クーロンガスに帰着させ、繰り込み群を計算

うーん、繰り込み群の計算をノーベル賞の理由に含まなかったのはこのためか。

Haldane 予想

F.D.M. Haldane: Phys. Letters A, **93**, p.464 (1983); Physical Review Letters, **50**, p.1153 (1983)

- ▶ 1950-1970 年代

1次元スピン鎖で $S=1/2$ の厳密解，ボゾン化の方法
エネルギーギャップは無く，相関関数は冪的挙動

→

この結果はあらゆるスピンの正しいと思われていた．

- ▶ 1次元ハイゼンベルクスピン鎖で整数と半整数スピンの違い
整数スピンでは，エネルギーギャップあり，相関関数は指数関数的挙動
- ▶ 部分積分で境界項をよく調べると，無視できないことがある
(トポロジカル項)．
この項は，整数スピンと半整数スピンでは影響が違う．
- ▶ 境界に特徴 (エッジ状態)

量子ホール効果と TKNN

D. J. Thouless, Mahito Kohmoto, M.P. Nightingale, and M. den Nijs: Physical Review Letters, 49(6):405, (1982)

量子ホール効果の説明，トポロジカルなチャーン数
磁場が無い場合にも応用可能な形式 (スピンホール効果など)，

トポロジーについて

1. 何らかの形を連続変形しても保たれる性質に焦点
2. 例 1. マグカップとドーナツの動画
3. 例 2. 回転数—(winding number)

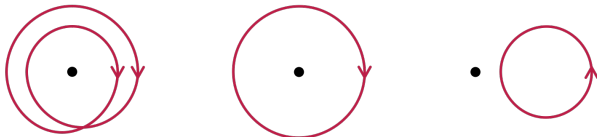


Figure: 左:巻数 -2, 中: -1, 右: 0



Figure: 左:1, 中: 2, 右: 3

トポロジーについて2

3. 例 2. 回転数の続き (数学や物理での例)

3.1 微分幾何学 (ベクトル解析)

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C \left(\frac{x}{r^2} dy - \frac{y}{r^2} dx \right) \quad (1)$$

3.2 複素関数論 (コーシーの積分定理)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{dz}{z - a} \quad (2)$$

3.3 磁束の量子化 (超伝導), 渦の量子化 (超流動)

トポロジーについて3 (量子渦)

循環 κ : 流体中で速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ にたいし、

$$\kappa \equiv \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (3)$$

(C : 閉曲線の積分路)

¹閉曲線 C を連続的に変形して 1 点にすることができる領域

トポロジーについて3 (量子渦)

循環 κ : 流体中で速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ にたいし、

$$\kappa \equiv \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (3)$$

(C :閉曲線の積分路)

超流動の複素秩序変数 $\phi(\mathbf{x}) = |\phi(\mathbf{x})| \exp(i\theta(\mathbf{x}))$

超流動速度場

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta \quad (4)$$

($\hbar = h/(2\pi)$, h : プランク定数、 m : ヘリウム原子の質量)

¹閉曲線 C を連続的に変形して1点にすることができる領域

トポロジーについて3 (量子渦)

循環 κ : 流体中で速度場 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ にたいし、

$$\kappa \equiv \oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} \quad (3)$$

(C :閉曲線の積分路)

超流動の複素秩序変数 $\phi(\mathbf{x}) = |\phi(\mathbf{x})| \exp(i\theta(\mathbf{x}))$

超流動速度場

$$\mathbf{v}_s = \frac{\hbar}{m} \nabla \theta \quad (4)$$

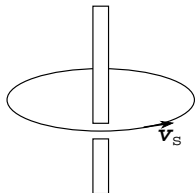
($\hbar = h/(2\pi)$, h : プランク定数、 m : ヘリウム原子の質量)

\mathbf{v}_s は流体力学でのポテンシャル流 ($\nabla \times \mathbf{v} = 0$) であるから、流体中の単連結領域¹での循環は0

¹閉曲線 C を連続的に変形して1点にすることができる領域

トポロジーについて4 (量子渦)

多重連結の領域: 渦の量子化 (超流動)



$\phi(\mathbf{x}) = |\phi(\mathbf{x})| \exp(i\theta(\mathbf{x}))$ は一価関数、したがって閉曲線 C を一周した時の位相差 $\Delta\theta$ は $2\pi n$ (n : 整数)

$$\kappa = \oint_C \mathbf{v}_s \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \frac{\hbar}{m} \nabla\theta \cdot d\mathbf{r} = \frac{\hbar}{m} 2\pi n \quad (5)$$

となる。したがって循環は以下のように量子化される。

$$\kappa = n\kappa_0, \quad \kappa_0 = \frac{2\pi\hbar}{m} \quad (6)$$

トポロジーについて5 (磁束量子化)

超伝導体の磁束も同様に量子化される。

$$\Phi_0 = \frac{h}{2e} \quad (7)$$

ジョセフソン接合, SQUID

2次元古典XYモデル

XYモデル:

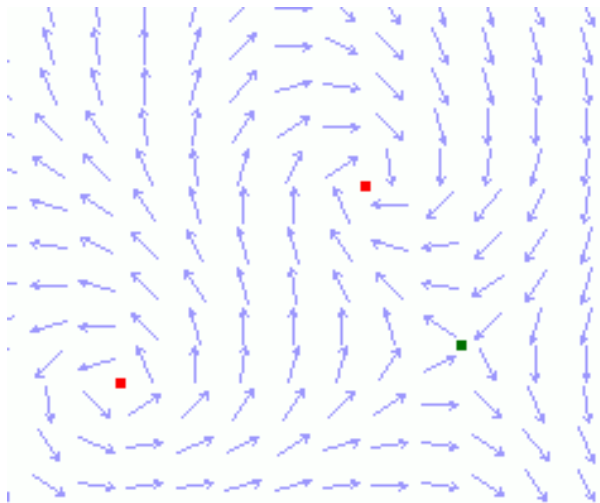
$$H_{XY} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \cos(\theta_i - \theta_j) \quad (8)$$

(ここで, $\theta_j (0 \leq \theta_j < 2\pi)$ は $\mathbf{S}_j \equiv (\cos \theta_j, \sin \theta_j)$ で定義した. さらに和 $\langle i, j \rangle$ は最近接格子間でとっている)

これは, 薄膜超流動や超伝導のモデルでもある.

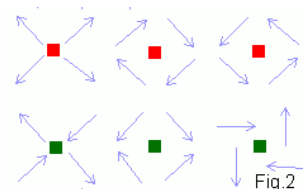
2次元XYモデルの渦

2次元XYモデルでの励起では、トポロジカルな渦が特徴



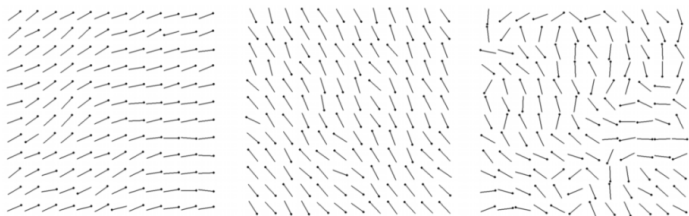
2次元XYモデルの渦

渦 (vortex) と反渦 (anti-vortex)



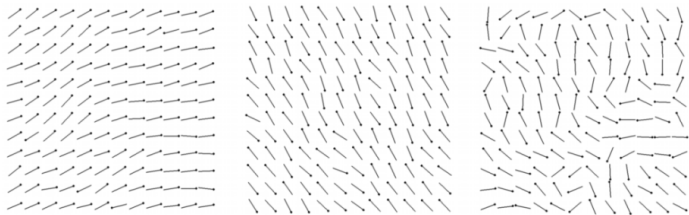
1. 渦
特異点のまわりを実格子で1周する時，XY スピンが同じ向きに回転する場合
2. 反渦
特異点のまわりを実格子で1周する時，XY スピンが逆向きに回転する場合
3. 渦や反渦の考えを一般化して，渦度 (整数) が定義できる
4. 全てのスピンを同じ角度変化させても，渦度は変わらない

2次元XYモデルの BKT 転移



1. 低温相
スピンの揃っている
2. 高温相
スピン秩序は無い,
3. 注意!
高温相でも低温相でも長距離秩序は無い.

2次元XYモデルの BKT 転移



1. 低温相
スピンの向きが揃っている
2. 高温相
スピン秩序は無い，スピン相関は指数関数的に減衰
3. 注意！
高温相でも低温相でも，2次元では長距離秩序は無い．
高温相と低温相の違いは，スピン相関が早く減衰（指数関数的減衰）するか，ゆっくり減衰するか（べき乗的減衰）

BKT 転移 2

1. 従来の相転移

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}') \rangle \approx \begin{cases} c_1 & (T < T_c) \\ c_2 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-\eta} & (T = T_c) \\ c_3 \exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\xi(T)) & (T > T_c) \end{cases} \quad (9)$$

1.1 低温では長距離秩序

1.2 高温では秩序はなく，相関関数は指数関数的に減衰．

1.3 臨界温度 T_c ではべき乗的減衰

2. 2次元 XY

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}') \rangle \approx \begin{cases} c_1 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-\eta(T)} & (T \leq T_c) \\ c_2 \exp(-|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/\xi(T)) & (T > T_c) \end{cases} \quad (10)$$

低温展開（スピン波近似）

(8) で，隣り合ったスピンの揺らぎが十分小さい場合
 $\cos(\theta_i - \theta_j) \approx 1 - (\theta_i - \theta_j)^2/2 \approx 1 - (\nabla\theta)^2/2$ と展開できる。
これをまとめると

$$H = E_0 + \frac{J}{2} \int d^2r (\nabla\theta(\mathbf{r}))^2 \quad (11)$$

($E_0 = 2JN$ は完全にスピンの揃った場合の基底状態エネルギー)
分配関数は ($\beta = 1/(k_B T)$)

$$Z = \exp(-\beta E_0) \int D[\theta] \exp\left(-\beta \frac{J}{2} \int d^2r (\nabla\theta(\mathbf{r}))^2\right) \quad (12)$$

この場合の Green 関数は $\nabla^2 \ln(r) = 2\pi\delta(r)$ より

$$\Gamma(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \equiv \langle \theta(\mathbf{r}')\theta(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \quad (13)$$

低温展開 (スピン波近似) 2

ガウス積分とグリーン関数 (一般論)

1. 1 変数のガウス積分

$$\begin{aligned} W(h) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\theta \exp\left(-\frac{1}{2}A\theta^2 + ih\theta\right) \\ &= (2\pi/A)^{1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}A^{-1}h^2\right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\therefore \langle \exp(ih\theta) \rangle \equiv \frac{W(h)}{W(0)} = \exp\left(-\frac{1}{2}A^{-1}h^2\right) \quad (15)$$

2. N 変数のガウス積分

確率分布関数が $\exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \theta_i A_{i,j} \theta_j\right)$ では

$$\langle \exp\left(i \sum_i h_i \theta_i\right) \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N h_i (A^{-1})_{i,j} h_j\right) \quad (16)$$

低温展開 (スピン波近似) 3

ガウス積分とグリーン関数 (一般論)

3. 連続変数

確率分布関数 $\exp(-\frac{1}{2} \int \int \theta(r) A(r, r') \theta(r') d^d r d^d r')$ では

$$\begin{aligned} W(h) &\equiv \langle \exp(i \int h(r) \theta(r) d^d r) \rangle \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2} \int \int h(r) A^{-1}(r, r') h(r') d^d r d^d r'\right) \end{aligned} \quad (17)$$

ここで A^{-1} の定義は

$$\int A^{-1}(r, r') A(r', r'') d^d r' = \delta^d(r - r'') \quad (18)$$

4. 以上より相関関数とグリーン関数の関係は

$$\langle \theta(\mathbf{r}') \theta(\mathbf{r}) \rangle = \frac{\delta^2 W(h)}{\delta h(r_1) \delta h(r_2)} = A^{-1}(r_1, r_2) \quad (19)$$

低温展開（スピン波近似）4

元の XY 模型での相関関数は

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{S}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}') \rangle &= \langle \exp(i(\theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{r}'))) \rangle \\ &= \exp\left(\frac{k_B T}{2\pi J} \Gamma(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\right) \\ &= \left(\frac{a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}\right)^{k_B T / 2\pi J}\end{aligned}\tag{20}$$

渦度：トポロジカルな励起

スピン波近似では $-\infty < \theta < \infty$ としていた．また， θ は1価としていた．

渦度：トポロジカルな励起

スピン波近似では $-\infty < \theta < \infty$ としていた．また， θ は 1 価としていた．

But, $\theta = \theta + 2\pi$ の周期性 \rightarrow 渦 (トポロジカルな励起)
渦度 v を次のように定義する

$$v \equiv \frac{1}{2\pi} \oint_C d\mathbf{l} \cdot \nabla \theta(\mathbf{r}) \quad (21)$$

ここで $S(\mathbf{r})(= \exp(i\theta(\mathbf{r})))$ は一価関数なので $v = n$ (n : 整数)

単一の渦のエネルギー

孤立した単一の渦については,

$$2\pi n = \oint_C d\mathbf{l} \nabla \cdot \theta(\mathbf{r}) = 2\pi r |\nabla \theta| \quad (22)$$

なので, $|\nabla \theta| = n/r$ となる.

単一の渦のエネルギーは, $|\nabla \theta(\mathbf{r})| = n/r$ より

$$\begin{aligned} E_{\text{vor}} - E_0 &= \frac{J}{2} \int d^2r (\nabla \theta(\mathbf{r}))^2 \\ &= \frac{Jn^2}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_a^L r dr \left(\frac{1}{r}\right)^2 = J\pi n^2 \ln \frac{L}{a} \end{aligned} \quad (23)$$

(L はシステムサイズ, a は格子間隔程度)

つまり, 単一の渦のエネルギーは, サイズ無限大で対数発散

渦対

渦 (渦度+1) と反渦 (渦度-1) でペアを作るとエネルギーは有限に収まる

(全体としての渦度は0なので)

渦対のエネルギーは大体

$$2\pi J \ln\left(\frac{r}{a}\right) \quad (24)$$

(r は渦対の間隔)

低温相ではスピン波近似 + (熱的に励起された) 渦対

温度が上昇すると、渦対が解離して、バラバラな渦になった方がエントロピー的には有利

単一の渦の自由エネルギーは

$$F = E - TS \approx J\pi \ln\left(\frac{L}{a}\right) - k_B T \ln\left(\frac{L^2}{a^2}\right) \quad (25)$$

$T_{KT} \approx J\pi/(2k_B)$ でエネルギーとエントロピーがバランスして相転移

渦と双対性

渦による寄与を定量的に扱おう．そのために双対場を導入する．

$$S = \frac{1}{2g} \int (\partial_\mu \theta)^2 d^2x, \quad (\theta \equiv \theta + 2\pi) \quad (26)$$

θ をスピン波成分 θ_{sw} と渦の成分 θ_{vortex} に分離する．

$$\theta(\mathbf{x}) = \theta_{sw}(\mathbf{x}) + \theta_{vortex}(\mathbf{x}) \quad (27)$$

$$\oint d\theta_{sw}(\mathbf{x}) = 0, \quad (28)$$

$$\oint d\theta_{vortex}(\mathbf{x}) = v \quad (v : \text{整数}) \quad (29)$$

渦の変数に対して双対場 ψ を導入

$$\epsilon_{\mu\nu} \partial_\nu \psi = \partial_\mu \theta_{vortex} \quad (30)$$

(複素関数の実部と虚部の関係)

渦と双対性

グリーンの定理を使うと

$$v = \oint d\theta_{vortex}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int \nabla^2 \psi d^2x \quad (31)$$

である．したがって

$$\nabla^2 \psi = -2\pi \sum_j v_j \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (v_j : \text{整数}) \quad (32)$$

2次元の Green 関数は $\frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x}|$ であるので，

$$\psi(\mathbf{x}) = -2\pi \sum_j v_j \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j| = - \sum_j v_j \ln |\mathbf{x} - \mathbf{x}_j| \quad (33)$$

元の渦の変数では

$$\theta_{vortex}(\mathbf{x}) = -\Im \sum_j v_j \ln(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \quad (34)$$

(複素数を使うと表示が簡便に)

2D Coulomb gas

渦どうしの相互作用にたいする Action は

$$S_{vortex} = -\frac{2\pi}{2g} \sum_{i,j} v_i v_j \ln |z_i - z_j| \quad (35)$$

(2次元クーロンガス (対数ポテンシャル))

スピン波成分と渦の成分の両方の Action を考慮して書き換えると, 量子 sine-Gordon 模型の形になる

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g} (\nabla\chi)^2 - 2 \cos\left(\frac{2\pi\chi}{g}\right) \quad (36)$$

(この表示では, $-\infty < \chi < \infty$)

繰り込み群

2次元クーロンガスや量子 sine-Gordon 模型は，スケール変換に対して結合定数が増加する (繰り込み) .

スケール変換 $\alpha \rightarrow \alpha' = \alpha \exp(dl) \approx \alpha(1 + dl)$ にたいして，

$$\begin{aligned}\frac{dy_1(l)}{dl} &= -y_2^2(l) \\ \frac{dy_2(l)}{dl} &= -y_1(l)y_2(l)\end{aligned}\tag{37}$$

システムサイズ L にたいして， $l_0 = \ln L$
様々な物理量に対数補正 ($1/\ln L$)

繰り込み群: レベルスペクトロスコピー

対数補正は収束が大変遅いので、数値計算に支障
単一の物理量の相関ではなく、複数の物理量の相関を用いると対
数補正を消去することができる。

K. Nomura: J. Phys. A, Vol. 28, pp.5451-5468 (1995); Nomura and A. Kitazawa: J.
Phys. A: Vol. 31 (1998) pp.7341

縮退がある場合の摂動論+繰り込み群

1次元量子スピンハイゼンベルクモデル

$$H = J \sum_j \mathbf{S}_j \cdot \mathbf{S}_{j+1} \quad (38)$$

- ▶ 基底状態は Néel 状態に近いが，長距離秩序は無い．
- ▶ 半整数スピン ($S=1/2, 3/2, \dots$) と整数スピン ($S=1, 2, \dots$) の違い
- ▶ 波数 0 と π のモードが重要

Haldane 予想:非線形シグマ模型

非線形シグマ模型

$$\frac{1}{2g} \int dt dx \left(\frac{1}{v} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - v \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right)$$
$$(\varphi \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \varphi^2 = 1) \quad (39)$$

Wick 回転すると

$$\frac{1}{2g} \int dx^2 (\nabla \varphi)^2 \quad (40)$$

(2次元古典ハイゼンベルクモデルと等価)

Haldane 予想:非線形シグマ模型

非線形シグマ模型

$$\frac{1}{2g} \int dt dx \left(\frac{1}{v} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - v \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right)$$
$$(\varphi \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \varphi^2 = 1) \quad (39)$$

Wick 回転すると

$$\frac{1}{2g} \int dx^2 (\nabla \varphi)^2 \quad (40)$$

(2次元古典ハイゼンベルクモデルと等価)

一見すると, massless(gapless) の自由場のモデルのように見える

Haldane 予想:非線形シグマ模型

非線形シグマ模型

$$\frac{1}{2g} \int dt dx \left(\frac{1}{v} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - v \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right)$$
$$(\varphi \equiv (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \varphi^2 = 1) \quad (39)$$

Wick 回転すると

$$\frac{1}{2g} \int dx^2 (\nabla \varphi)^2 \quad (40)$$

(2次元古典ハイゼンベルクモデルと等価)

一見すると, massless(gapless) の自由場のモデルのように見える

But $\varphi^2 = 1$ という制約のため, エネルギーギャップ生成

Haldane 予想:非線形シグマ模型 2

非線形シグマ模型

- ▶ 繰り込み群
- ▶ インスタントン (後で述べるトポロジカル項と関連)
低温では無限遠で φ が揃う
 - 平面の無限遠点を同一視して球面とみなせる
 - 球面から球面への写像

Haldane 予想:非線形シグマ模型 2

非線形シグマ模型

- ▶ 繰り込み群
- ▶ インスタントン (後で述べるトポロジカル項と関連)
低温では無限遠で φ が揃う
 - 平面の無限遠点を同一視して球面とみなせる
 - 球面から球面への写像



Figure: これを量子化するとインスタントン (ネタです)

どちらからも gap 生成

Haldane 予想:非線形シグマ模型 2

非線形シグマ模型

- ▶ 繰り込み群
- ▶ インスタントン (後で述べるトポロジカル項と関連)
低温では無限遠で φ が揃う
→ 平面の無限遠点を同一視して球面とみなせる
→ 球面から球面への写像



Figure: これを量子化するとインスタントン (ネタです)

どちらからも gap 生成

元々は 4 次元 Yang-Mills 場 (非可換ゲージ場) の非摂動解を調べるため、簡略化したものとして 2 次元非線形シグマ模型を導入

Haldane 予想:ハイゼンベルクから非線形シグマへ

ハイゼンベルクモデルを連続体近似, 波数 0 と π のモードに注目する .

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{2i} &\equiv \frac{1}{2s}(\hat{S}_{2i+1} - \hat{S}_{2i}) \\ \hat{l}_{2i} &\equiv \frac{1}{2a}(\hat{S}_{2i+1} + \hat{S}_{2i})\end{aligned}\quad (41)$$

交換関係は $a \rightarrow 0, s \rightarrow \infty$ の極限で

$$\begin{aligned}[\hat{l}^a(x), \hat{l}^b(y)] &= i\epsilon^{abc}\hat{l}^c\delta(x-y) \\ [\hat{l}^a(x), \hat{\varphi}^b(y)] &= i\epsilon^{abc}\hat{\varphi}^c\delta(x-y) \\ [\hat{\varphi}^a(x), \hat{\varphi}^b(y)] &= i\epsilon^{abc}\hat{l}^c\frac{a^2}{s^2}\delta(x-y) \rightarrow 0\end{aligned}\quad (42)$$

ここで

$$\delta(x-y) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\delta_{x,y}}{a}$$

Haldane 予想:ハイゼンベルクから非線形シグマへ2

交換関係以外に, 直交関係

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{2i} \cdot \hat{l}_{2i} &= \frac{1}{2s}(\hat{S}_{2i+1} - \hat{S}_{2i}) \cdot \frac{1}{2a}(\hat{S}_{2i+1} + \hat{S}_{2i}) \\ &= \frac{1}{2sa}(\hat{S}_{2i+1}^2 + \hat{S}_{2i+1} \cdot \hat{S}_{2i} - \hat{S}_{2i+1} \cdot \hat{S}_{2i} - \hat{S}_{2i}^2) \\ &= 0\end{aligned}\tag{43}$$

および $\hat{\varphi}$ はほぼ単位ベクトル

$$\begin{aligned}(\hat{\varphi}_{2i})^2 &= \frac{1}{4s^2}[\hat{S}_{2i}^2 + \hat{S}_{2i+1}^2 - 2\hat{S}_{2i} \cdot \hat{S}_{2i+1}] \\ &= \frac{1}{4s^2}[2\hat{S}_{2i}^2 + 2\hat{S}_{2i+1}^2 - 4a^2(\hat{l}_{2i})^2] \\ &= 1 + 1/s - a^2\hat{l}/s^2\end{aligned}\tag{44}$$

である.

Haldane 予想:ハイゼンベルクから非線形シグマへ3

$$\hat{S}_{2i} \cdot \hat{S}_{2i+1} = 2a^2 \hat{l}_{2i}^2 + s(s+1) \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \hat{S}_{2i-1} \cdot \hat{S}_{2i} &= -s^2 \hat{\varphi}_{2i-2} \cdot \hat{\varphi}_{2i} \\ &\quad - as \left[\hat{l}_{2i-2} \cdot \hat{\varphi}_{2i} - \hat{\varphi}_{2i-2} \cdot \hat{l}_{2i} \right] \\ &\quad + a^2 \hat{l}_{2i-2} \cdot \hat{l}_{2i} \\ &\approx a^2 \left(2s^2 (\hat{\varphi}')^2 - 2s(\hat{l} \cdot \hat{\varphi}' + \hat{\varphi}' \cdot \hat{l}) + 2\hat{l}^2 \right) \\ &\quad - s(s+1) - 2a^2 s^2 (\hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi}')' \end{aligned} \quad (46)$$

(ここで, $\hat{\varphi}^2 = 1 + 1/s - a\hat{l}^2/s^2$ と, $\hat{\varphi}''\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}'\hat{\varphi})' - (\hat{\varphi}')^2$ を使った.)

Haldane 予想:ハイゼンベルクから非線形シグマへ4

$$\hat{H} = \frac{aJ}{2} \int dx [4\hat{\mathbf{l}}^2 + 2s^2(\hat{\varphi}')^2 - 2s(\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\varphi}' + \hat{\varphi}' \cdot \hat{\mathbf{l}})] \quad (47)$$

書き換えると

$$\hat{H} = \int dx \hat{\mathcal{H}}, \quad (48)$$

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{v}{2} \left[g \left(\hat{\mathbf{l}} - \frac{\theta}{4\pi} \hat{\varphi}' \right)^2 + \frac{(\hat{\varphi}')^2}{g} \right] \quad (49)$$

ここで, $v = 2Jas$, $g = 2/s$, $\theta = 2\pi s$

Haldane 予想:ハイゼンベルクから非線形シグマへ5

Hamiltonian 密度 (49) はつぎの Lagrangian 密度

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2g} \partial_\mu \hat{\varphi} \partial^\mu \hat{\varphi} + \frac{\theta}{8\pi} \epsilon^{\mu\nu} \hat{\varphi} \cdot (\partial_\mu \hat{\varphi} \times \partial_\nu \hat{\varphi}) \\ &= \frac{1}{2g} (\partial_0 \varphi \partial_0 \varphi - \partial_1 \varphi \partial_1 \varphi) + \frac{\theta}{4\pi} \varphi \cdot (\partial_0 \varphi \times \partial_1 \varphi)\end{aligned}\quad (50)$$

から得られる (簡単のため $v = 1$ とした)

[証明]

この場合の運動量密度は

$$\mathbf{\Pi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi)} = \frac{1}{g} \partial_0 \varphi + \frac{\theta}{4\pi} (\partial_1 \varphi \times \varphi)\quad (51)$$

ハミルトニアン密度は (次ページ)

Haldane 予想:ハイゼンベルクから非線形シグマへ6

ハミルトニアン密度は

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &\equiv \partial_0\varphi \cdot \mathbf{\Pi} - \mathcal{L} \\ &= \frac{g}{2} \left(\varphi \times \mathbf{\Pi} - \frac{\theta}{4\pi} (\partial_1\varphi) \right)^2 + \frac{1}{2g} (\partial_1\varphi)^2\end{aligned}\quad (52)$$

ここで $\hat{l} \equiv \varphi \times \mathbf{\Pi}$ とすると,

$$\hat{H} = \frac{v}{2} \int dx \left[g \left(\hat{l} - \frac{\theta}{4\pi} \hat{\varphi}' \right)^2 + \frac{(\hat{\varphi}')^2}{g} \right]$$

Q.E.D.

Haldane 予想:ハイゼンベルクから非線形シグマへ7

得られた Lagrangian 密度を Wick 回転して Euclid 計量に直すと

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2g} \partial_\mu \hat{\varphi} \partial^\mu \hat{\varphi} + \frac{i\theta}{8\pi} \epsilon^{\mu\nu} \hat{\varphi} \cdot (\partial_\mu \hat{\varphi} \times \partial_\nu \hat{\varphi}) \\ &= \frac{1}{2g} (\partial_0 \varphi \partial_0 \varphi - \partial_1 \varphi \partial_1 \varphi) + \frac{\theta}{4\pi} \varphi \cdot (\partial_0 \varphi \times \partial_1 \varphi)\end{aligned}\quad (53)$$

真空期待値は (経路積分の形で)

$$Z = \int \mathcal{D}\varphi \exp\left(-\int d^2x \mathcal{L}\right)\quad (54)$$

Haldane 予想: トポロジカル項

前の結果には，非線形シグマ模型の項 (S_0 とあらわす) に加え，

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int d^2x \epsilon^{\mu\nu} \hat{\varphi} \cdot (\partial_\mu \hat{\varphi} \times \partial_\nu \hat{\varphi}) \quad (55)$$

がついていた (トポロジカル項) .

この項は整数値をとる .

ユークリッド表示で $\exp(S_0 + i\theta Q)$ であり， $\theta = 2\pi s$ を考慮すると，

- ▶ 整数スピンではトポロジカル項の寄与は無く，単純な非線形シグマ模型 \rightarrow gapped
- ▶ 半整数スピンではトポロジカル項の寄与で，gapless

Haldane 予想: トポロジカル項 2

トポロジカル項が整数ということを示す.

$\varphi = (\sin \alpha \cos \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \alpha)$ と変数変換すると

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{8\pi} \int d^2x \epsilon^{\mu\nu} \hat{\varphi} \cdot (\partial_\mu \hat{\varphi} \times \partial_\nu \hat{\varphi}) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^2x \sin \alpha \epsilon^{\mu\nu} \partial_\mu \alpha \partial_\nu \beta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \sin \alpha \frac{D(\alpha, \beta)}{D(x_0, x_1)} dx_0 dx_1 \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dS_{\text{int}} \end{aligned} \tag{56}$$

$(\frac{D(\alpha, \beta)}{D(x_0, x_1)})$ はヤコビアン)

結論: 球面から球面への連続写像 $\rightarrow Q$ は整数

インスタントン

インスタントン：トポロジカル数 Q を固定したときの最小作用解

$$\partial_\mu \varphi + \epsilon_{\mu\nu} (\varphi \times \partial_\nu \varphi) = 0 \quad (57)$$

$\varphi^2 = 1$ を考慮して，次の複素数 w を導入 (球面から複素平面へ)

$$w = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{1 + \varphi_3} \quad (58)$$

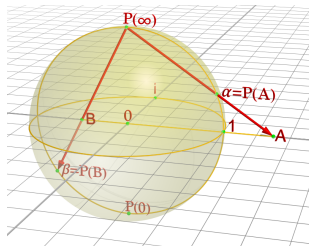


Figure: 球面から複素平面への投影

インスタントン2

すると (57) は

$$\partial_{\bar{z}} w = 0, \quad (z = x_0 + ix_1) \quad (59)$$

したがってインスタントン解は

$$w(z) = \prod_{j=1}^Q \frac{z - a_j}{z - b_j} \quad (60)$$

Haldane 予想:半整数スピン

非線形シグマ模型を使った説明では、整数スピンの場合はギャップが生じるのが自然だが、半整数スピンの場合はギャップレスになるのは分かりにくい

他の方法

1. $S=1/2$

Bethe 仮説による厳密解

2. それ以外の半整数スピン ($S=3/2, 5/2, \dots$)

Lieb-Schultz-Mattis

I. Affleck, E.H. Lieb: Lett. Math. Phys, p. 57 (1986)

K. N., J. Morishige, T. Isoyama : J. Phys.A. **48**, p.375001 (2015)

Haldane 予想:整数スピン

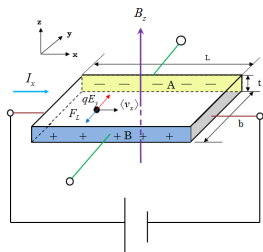
Haldane 予想とは独立な検証

1. 数値計算
2. 実験
3. AKLT(Affleck-Kennedy-Lieb-Tasaki)

I. Affleck, T. Kennedy, E.H.Lieb, H.Tasaki: Physical Review Letters. **59**, p.799(1987) .

ホール効果 (Hall effect)

電流の流れているものに対し、電流に垂直に磁場をかけると、電流と磁場の両方に直交する方向に起電力が現れる現象



$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (61)$$

$$R_H \equiv \frac{E_y}{j_x B} = \frac{1}{nq} \quad (62)$$

応用：磁気センサー、携帯電話やパソコンの開閉の検出、自動車エンジンでの点火時期把握

量子ホール効果

量子ホール効果: 低温強磁場中の2次元電子系ではホール伝導率 σ_{xy} が量子化

$$\sigma_{xy} = \frac{I_{channel}}{V_{Hall}} = \nu \frac{e^2}{h} \quad (63)$$

(h : プランク定数、 ν : 整数または有理数
($1/3, 2/3, 1/5, 2/5, 3/5, \dots$))

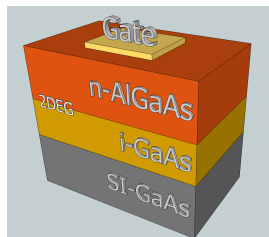
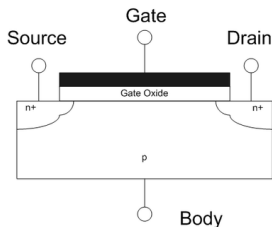
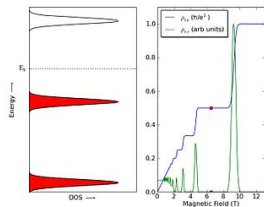


Figure: 2次元電子系 (左: MOS FET、右 GaAs ヘテロ接合)

量子ホール効果



量子ホール効果の動画

ランダウ準位 (電子の軌道運動が量子化), アンダーソン局在、フェルミオン

量子ホール効果：TKNN

TKNN(Thouless-Kohmoto-Nightingale-denNijs)

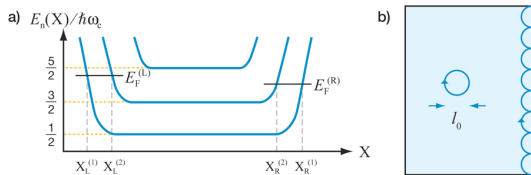
波数空間でのトポロジー (トーラス上)

ブロッホの定理

チャーン数

量子ホール効果：バルク-エッジ (bulk-edge) 対応

量子ホール効果：バルクは絶縁体だが、エッジ (端) に永続電流 (persistent current)

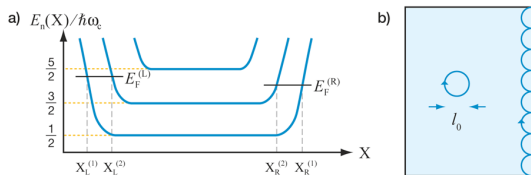


(TKNN 理論では、並進対称性を前提にしていたが、エッジではこれが破れるため)

バルクのトポロジ構造を反映し、エッジ電流の量子化

量子ホール効果：バルク-エッジ (bulk-edge) 対応

量子ホール効果：バルクは絶縁体だが、エッジ (端) に永続電流 (persistent current)



(TKNN 理論では、並進対称性を前提にしていたが、エッジではこれが破れるため)

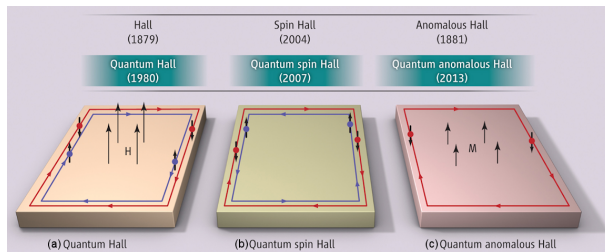
バルクのトポロジ構造を反映し、エッジ電流の量子化

カイラルエッジ電流 (chiral edge current): エッジ電流は、時計回りと反時計回りが考えられるが、磁場下では片方のみ実現

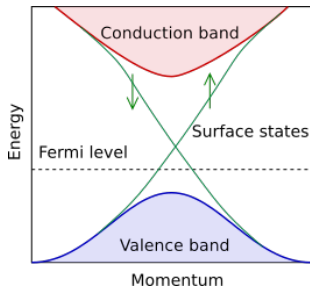
スピノール効果

量子スピホール効果

ゼロ磁場, カイラル電流が逆向きなので電流は打ち消されるが、
スピン流はあり量子化



トポロジカル絶縁体



ゼロ磁場、時間反転対称、スピン軌道相互作用
バルクは絶縁体、表面にギャップレス状態、
後方散乱禁止

ゲージ変換

ベリ－曲率

まとめ

1. トポロジー
 - 1.1 BKT 転移の渦は，円周上のトポロジー
 - 1.2 Haldane 予想は，球面から球面へのトポロジー (量子力学の回転と運動量，被覆群)
 - 1.3 量子ホール効果、波数空間でのトポロジー (ブロッホの定理) TKNN
2. トポロジーの性質は摂動に対して安定、不純物などの影響を受けにくい。
3. 関連した発展
 - 3.1 スピントロニクス
 - 3.2 SPTP
 - 3.3 グラフェン
 - 3.4 トポロジカル超伝導
 - 3.5 光ホール効果 (フォトニック結晶)
 - 3.6 熱ホール効果